Institut de mathématiques
de l'Université de Fribourg (Suisse)

ÉLÉMENTS FINIS TÉTRAÉDRIQUES DE CLASSE C^1 ET DE DEGRÉ DEUX

THÈSE

présentée à la Faculté des Sciences de l'Université
de Fribourg (Suisse)

pour l'obtention du grade de docteur ès sciences mathématiques

par

MARCEL DÉLÈZE
de Nendaz (Valais)

Thèse No 790

F. Stettler - DISS-PRINT - Fribourg
1979

Acceptée par la Faculté des Sciences de l'Université de Fribourg (Suisse) sur la proposition de MM. les professeurs J. DESCLOUX et A. ANTILLE.

Fribourg, le 13 décembre 1978.

Le Doyen
F. P. EMMENEGGER

AVANT-PROPOS.

En janvier 1976, M. Délèze et J.-J. Goël publièrent le premier élément fini de classe C^1 défini sur un tétraèdre [6]. Accompagné d'un autre élément de degré plus élevé, cet élément fini fit l'objet d'un article dans "International journal for numerical methods in engineering" [7].

Pour distinguer ce premier élément des versions ultérieures, nous l'avons baptisé <u>variante I-A</u>. Il s'agit d'un élément à 16 paramètres; ce sont, à chaque sommet du tétraèdre, la valeur de la fonction et de ses trois dérivées partielles. Les interpolants sur un tétraèdre sont définis à partir de 44 fonctions de référence, à savoir 16 polynômes de degré $\leqslant 3$, 12 polynômes par morceaux de degré $\leqslant 3$ et 16 fonctions rationnelles par morceaux.

La forme de ces dernières fonctions est lourde et compliquée. Cette thèse vise à déterminer des fonctions de référence un peu plus simples. Nous avons abouti à deux éléments finis améliorés, la variante I-C et la variante II. Les méthodes que nous avons développées sont assez générales et peuvent apporter une contribution à la construction d'autres éléments finis. La construction a été complétée par l'analyse de l'erreur d'interpolation dans les espaces de SOBOLEV.

****

Cette publication a été faite avec l'appui financier du Conseil de l'Université de Fribourg.

TABLE DES MATIERES.

§ 1 INTRODUCTION.

1.1. Définitions.

Tous les éléments finis dont nous parlerons seront des éléments finis droits, c'est-à-dire définis sur des polyèdres de $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.

Un élément fini est un triplet (K,Q,V) où

(i) K est un polyèdre compact de $\mathbb{R}^n$ dont l'intérieur n'est pas vide;

(ii) V est un sous-espace linéaire de $C^s(\overline{K})$;

(iii) $Q: C^s(\overline{K}) \longrightarrow \mathbb{R}^N$ est une application dont les composantes $Q_1,\ldots,Q_N$, appelées paramètres, sont de la forme

$$Q_i(v) = v(A_i),\ A_i \in K,$$

ou bien $Q_i(v) = Dv(A_i)(\xi_{i1}),\ldots,$

ou bien $Q_i(v) = D^s v(A_i)(\xi_{i1},\ldots,\xi_{is})$,

$\xi_{i1},\ldots,\xi_{is} \in \mathbb{R}^n$, $i = 1,\ldots,N$.

(iv) La restriction $Q_{|V}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Définition 2.

L'interpolation associée à un élément fini (K,Q,V) est l'application linéaire

$$\pi: C^s(\overline{K}) \longrightarrow V,$$

$$\pi(f) := (Q_{|V})^{-1}(Qf).$$

Définition 3.

Désignons par $\{e_1,\ldots,e_N\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^N$. La base de Lagrange d'un élément fini (K,Q,V) désigne la base $\{Q^{-1}(e_1),\ldots,Q^{-1}(e_N)\}$ de V.

Lorsqu'un des paramètres est une dérivée d'ordre $\geqslant 1$, la base de Lagrange est aussi appelée base d'Hermite.

Définition 4.

Un élément fini (K,Q,V) est dit de degré k: $\Longleftrightarrow$ V contient tous les polynômes p: $K \longrightarrow \mathbb{R}$ de degré $\leqslant$ k.

Un élément fini (K,Q,V) est dit polynomial: $\Longleftrightarrow$ tous les éléments de V sont des polynômes.

Définition 5.

Nous introduisons les espaces de SOBOLEV. Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$,

$$\mathcal{D}(\Omega) := \{\varphi \in C^\infty(\Omega);\ \text{support de } \varphi \text{ compact dans } \Omega\}.$$

Pour les multi-indices $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, nous notons

$$|\alpha| := \alpha_1 + \ldots + \alpha_n\ ,$$

$$\partial^\alpha := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}\ .$$

Soit $v \in L^2(\Omega)$. On dit que $\partial^\alpha v \in L^2(\Omega)$ si et seulement si il existe une fonction de $L^2(\Omega)$ notée $\partial^\alpha v$ telle que $\forall\ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\int_\Omega \partial^\alpha v\, \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v\, \partial^\alpha \varphi\ .$$

L'espace

$$H^m(\Omega) := \{v \in L^2(\Omega);\ \partial^\alpha v \in L^2(\Omega) \text{ pour } |\alpha| \leqslant m\}$$

est muni des semi-normes

$$|v|_{j,\Omega} := \{ \sum_{|\alpha|=j} \int_\Omega |\partial^\alpha v|^2 \}^{1/2}, \quad j = 0(1)m,$$

et de la norme

$$\|v\|_{m,\Omega} := \{ \sum_{j=o}^{m} |v|^2_{j,\Omega} \}^{1/2}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

On définit $H^m_o(\Omega)$ comme étant l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^m(\Omega)$ relativement à la norme $\| \ \|_{m,\Omega}$.

Définition 6.

Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et $k \geqslant 1$. Une fonction $v: \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^k presque partout: $\Longleftrightarrow$ $v \in C^{k-1}(\overline{\Omega})$ et il existe dans $\mathbb{R}^n$ des ouverts disjoints à bords lipschitziens $U_1,\ldots,U_N$ tels que $\bigsqcup_{i=1}^{N} \overline{U}_i = \overline{\Omega}$ et $v_{|U_i} \in C^k(U_i)$ pour $i = 1,\ldots,N$.

Remarque.

Contrairement à la définition des fonctions de classe C^k par morceaux, nous n'exigeons pas que $v_{|\overline{U}_i} \in C^k(\overline{U}_i)$ pour $i = 1,\ldots,N$.

Exemple.

Sur le triangle

$$\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x > 0,\ y > 0,\ 1-x-y > 0\},$$

considérons la fonction

$$v(x,y) := \frac{x^2 y}{x + y}.$$

Nous allons montrer que v est de classe C^2 presque partout, que ses dérivées partielles d'ordre deux sont bornées, mais que v n'est pas de classe $C^2(\overline{\Omega})$.

Remarquons d'abord que, dans Ω, nous avons

$$0 < \frac{x}{x + y} < 1 \quad \text{et} \quad 0 < \frac{y}{x + y} < 1.$$

Les dérivées partielles

$$\partial_x v(x,y) = \frac{2xy}{x+y} - \frac{x^2y}{(x+y)^2} ,$$

$$\partial_y v(x,y) = \frac{x^2}{x+y} - \frac{x^2y}{(x+y)^2}$$

se laissent prolonger continûment en (0,0) et, par suite, $v \in C^1(\bar{\Omega})$. Par contre,

$$\partial_x^2 v(x,y) = \frac{2y}{x+y} - \frac{4xy}{(x+y)^2} + \frac{2x^2y}{(x+y)^3}$$

ne se laisse pas prolonger continûment en (0,0) puisque

$$\partial_x^2 v(0,y) = 2 \qquad \forall y > 0,$$

$$\partial_x^2 v(x,0) = 0 \qquad \forall x > 0.$$

Cependant, $\partial_x^2 v$ reste borné dans Ω.

On obtient des résultats analogues pour $\partial_x \partial_y v$ et $\partial_y^2 v$.

<u>Définition 7.</u>

Soit Ω un polyèdre ouvert borné dans $\mathbb{R}^3$. Nous appelons <u>mosaïque de tétraèdres</u> une décomposition de $\bar{\Omega}$ en un nombre fini de tétraèdres fermés $S_1,\ldots,S_M$ satisfaisant

(i) $\bar{\Omega} = \bigsqcup_{m=1}^{M} S_m$,

(ii) pour $\ell \neq m$, $S_\ell \cap S_m$ est soit vide, soit un sommet commun à S_ℓ et S_m , soit une arête commune à S_ℓ et S_m , soit une face commune à S_ℓ et S_m .

Définition 8.

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$,

T un sous-espace affine de $\mathbb{R}^n$ de dimension m avec

$T \cap \Omega \neq \emptyset$ et $1 \leqslant m < n$,

$v: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

Nous dirons que "$v_{|T\cap\Omega}$, considéré comme une fonction de m variables, est un polynôme de degré $\leqslant k$" ou bien que "$v_{|T\cap\Omega}$ est un polynôme de degré $\leqslant k$ à m variables" si et seulement si, pour une paramétrisation affine $p: \mathbb{R}^m \longrightarrow T$, la fonction $v \circ p$ définie sur $p^{-1}(T\cap\Omega)$ est un polynôme de degré $\leqslant k$.

Notation.

Soient Ω ouvert dans $\mathbb{R}^n$, $v \in C^1(\overline{\Omega})$, $A \in \overline{\Omega}$ et $\xi \in \mathbb{R}^n$. Nous utiliserons la notation suivante

$$\partial_\xi v(A) := Dv(A)\ (\xi)$$

c'est-à-dire

$$\partial_\xi v(A) = \xi_1 \partial_{x_1} v(A) + \ldots + \xi_n \partial_{x_n} v(A).$$

1.2. Enoncé du problème élément fini.

Soit S un tétraèdre fermé, non dégénéré, de sommets A_1, A_2, A_3, A_4 dans $\mathbb{R}^3$. Nous cherchons un espace linéaire $V = V(S) \subset C^1(\overline{S})$ possédant les propriétés suivantes.

(i) Les fonctions de V sont de classe C^2 presque partout; leurs dérivées partielles d'ordre deux sont bornées.

(ii) V contient tous les polynômes de degré $\leqslant 2$ à trois variables.

(iii) Pour seize nombres réels $C_1,\ldots,C_{16}$ donnés, il existe un et un seul élément $v \in V$ tel que

$$v(A_i) = C_{4i-3} \qquad \partial_x v(A_i) = C_{4i-2}$$

$$\partial_y v(A_i) = C_{4i-1} \qquad \partial_z v(A_i) = C_{4i} ,$$

$i = 1(1)4$.

(iv) Soient S_1 et S_2 deux tétraèdres d'une mosaïque. Soit $\{A_1,\ldots,A_K\}$ l'ensemble des sommets de S_1 et S_2. Pour 4K nombres réels donnés, le problème d'interpolation (iii) détermine une fonction v_1 définie sur S_1 et v_2 définie sur S_2. Nous exigeons que v_1 et v_2 coïncident sur $S_1 \cap S_2$ et définissent ensemble une fonction continûment différentiable sur $S_1 \cup S_2$.

(v) L'espace V et la solution $v \in V$ du problème d'interpolation (iii) ne dépendent pas de la numérotation des quatre sommets de S.

Remarque 1.

La propriété (i) entraîne que $\forall\, v \in V$, les dérivées partielles d'ordre deux de v appartiennent à $L^\infty(S)$. En particulier, $V(S) \subset H^2(S)$.

Remarque 2.

Définissons $Q: C^1(\bar{S}) \longrightarrow \mathbb{R}^{16}$,

$$Q_{4i-3}(v) := v(A_i), \quad Q_{4i-2}(v) := \partial_x v(A_i),$$

$$Q_{4i-1}(v) := \partial_y v(A_i), \quad Q_{4i}(v) := \partial_z v(A_i),$$

$i = 1(1)4$.

La propriété (iii) exprime que (S,Q,V) est un élément fini. En particulier, dim V = 16.

Remarque 3.

La propriété (ii) s'énonce aussi "l'élément fini (S,Q,V) est de degré deux".

Définition 1.

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des tétraèdres non dégénérés de $\mathbb{R}^3$. Une solution du problème élément fini ci-dessus est une famille d'éléments finis

$$\{(S,Q(S),\ V(S));\ S \in \mathcal{S}\}.$$

Une telle famille sera caractérisée par un élément fini générique, c'est-à-dire un élément (S,Q(S), V(S)) où $S \in \mathcal{S}$ est un paramètre libre.

Définition 2.

Soient (S,Q(S), V(S)) un élément fini générique solution,

Ω un polyèdre ouvert borné dans $\mathbb{R}^3$,

$S_1,\ldots,S_M$ une mosaïque de tétraèdres sur Ω,

$\{A_1,\ldots,A_K\}$ l'ensemble des sommets de $S_1,\ldots,S_M$.

A 4K nombres réels $c_{ok},c_{1k},c_{2k},c_{3k}$, $k = 1(1)K$, donnés, on fait correspondre une fonction $w: \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$w_{|S_m} \in V(S_m) \text{ pour } m = 1(1)M \text{ et}$$

$$w(A_k) = c_{ok} \qquad \partial_x w(A_k) = c_{1k}$$

$$\partial_y w(A_k) = c_{2k} \qquad \partial_z w(A_k) = c_{3k}\ , \quad k = 1(1)K.$$

L'ensemble W des fonctions w ainsi construites est appelé <u>espace de type élément fini</u> associé à la mosaïque.

<u>Définition 3.</u>

La première partie de la propriété (iv)

"v_1 et v_2 coïncident sur $S_1 \cap S_2$"

a la conséquence suivante

"pour toute mosaïque de tétraèdres sur un Ω, l'espace de type élément fini associé W est inclu dans $C^o(\bar{\Omega})$".

On dit alors que l'élément fini générique (S,Q(S),V(S)) est <u>de classe C^o</u>.

La propriété (iv) entraîne que, pour toute mosaïque de tétraèdres sur un Ω, l'espace de type élément fini associé est dans $C^1(\bar{\Omega})$.

On dit alors que l'élément fini générique (S,Q(S),V(S)) est <u>de classe C^1</u>.

<u>Définition 4.</u>

Soient (S,Q(S),V(S)) un élément fini générique solution,

$S_1,\ldots,S_M$ une mosaïque de tétraèdres sur Ω,

W l'espace de type élément fini associé,

$\{A_1,\ldots,A_K\}$ l'ensemble des sommets de $S_1,\ldots,S_M$.

On définit <u>l'interpolation globale</u>

$$\pi \colon C^1(\bar{\Omega}) \longrightarrow W$$

par $\pi(f) := w$ où w est la fonction de type élément fini satisfaisant

$$w(A_k) = f(A_k) \qquad \partial_x\, w(A_k) = \partial_x\, f(A_k)$$

$$\partial_y\, w(A_k) = \partial_y\, f(A_k) \qquad \partial_z\, w(A_k) = \partial_z\, f(A_k),$$

$k = 1(1)K$.

Proposition.

Soient $(S,Q(S),V(S))$ un élément fini générique solution,

$S_1,\ldots,S_M$ une mosaïque de tétraèdres sur Ω,

W l'espace de type élément fini associé.

Les inclusions

$V(S_m) \subset H^2(S_m)$, $m = 1(1)M$,

$W \subset C^1(\bar{\Omega})$

entraînent que

(i) $W \subset H^2(\Omega)$,

(ii) $\{w \in W;\ w_{|\partial\Omega} = 0\} \subset H^2(\Omega) \cap H_o^1(\Omega)$,

(iii) $\{w \in W;\ w_{|\partial\Omega} = \frac{\partial w}{\partial \nu}_{|\partial\Omega} = 0\} \subset H_o^2(\Omega)$,

$\frac{\partial}{\partial \nu}$ désignant la dérivée normale au bord du polyèdre Ω.

Démonstration.

Cette proposition est un cas particulier d'un théorème connu. Voir par exemple CIARLET [3], Theorem 2.1.2.



1.3. Les solutions du problème élément fini.

Définition.

Soit $(S,Q(S),V(S))$ un élément fini générique, solution du problème élément fini 1.2.

Soit $\tilde{S}$ le tétraèdre de référence de sommets

$\tilde{A}_1 = (0,0,0)$, $\tilde{A}_2 = (1,0,0)$, $\tilde{A}_3 = (0,1,0)$, $\tilde{A}_4 = (0,0,1)$.

Soit $L\colon \tilde{S} \longrightarrow S$ l'application affine définie par $L(\tilde{A}_i) = A_i$, $i = 1(1)4$.

Nous appelons <u>espace de référence</u> de l'élément fini générique tout sous-espace linéaire $\tilde{U} \subset C^1(\tilde{\bar{S}})$ de dimension finie tel que, pour tout S,

$$V(S) \subset \{\tilde{u} \circ L^{-1};\ \tilde{u} \in \tilde{U}\}.$$

<u>Corollaire et définition.</u>

Soit $\tilde{U}$ un espace de référence de l'élément fini générique (S,Q(S),V(S)). Alors $v \in V(S)$ peut se mettre sous la forme d'une combinaison linéaire

$$v = \sum_{j=1}^{J} s_j \ \tilde{u}_j \circ L^{-1}$$

où $\{\tilde{u}_1,\ldots,\tilde{u}_J\}$ est un système générateur de $\tilde{U}$ fixé indépendamment de S. Les fonctions $\tilde{u}_1,\ldots,\tilde{u}_J$ sont alors appelées <u>fonctions de référence</u> de l'élément générique.

<u>Les solutions du problème élément fini.</u>

Nous avons construit deux éléments finis génériques

$(S,Q(S),V^{I}(S))$ (variante I-C),

$(S,Q(S),V^{II}(S))$ (variante II)

qui sont solutions du problème élément fini 1.2.

La variante I-C s'exprime avec 44 fonctions de référence (voir § 6). Ce sont 16 polynômes de degré $\leqslant 3$, 12 polynômes par morceaux de degré $\leqslant 3$ et 16 fonctions rationnelles par morceaux (voir 6.2).

Un espace de référence n'apparaît pas immédiatement lors de la construction de la variante II (voir § 5). Un élément

$v \in V^{II}(S)$ s'exprime sous la forme

$$v = \sum_{j=1}^{28} s_j \tilde{u}_j \circ L^{-1}$$

où $\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_{16}$ sont des polynômes de degré $\leqslant 3$ indépendants de S et $\tilde{u}_{17}, \ldots, \tilde{u}_{28}$ sont des fonctions rationnelles qui dépendent encore de S. Nous montrerons que la variante II se laisse exprimer avec 52 fonctions de référence (voir 5.4, théorème 2).

Plan de l'exposé.

La première partie de l'exposé est consacrée à la construction des éléments finis. Elle comprend les paragraphes 2 à 6. La construction des deux variantes comporte des parties communes; le paragraphe 2 rassemble certains aspects de la construction qui relèvent de l'algèbre linéaire; le paragraphe 3 construit les éléments finis triangulaires de classe C^1 qui correspondront plus tard aux faces du tétraèdre; le paragraphe 4 construit seize polynômes de degré $\leqslant 3$ qui sont des fonctions de référence communes aux deux variantes. Dès lors, la construction se ramifie; le paragraphe 5 achève la construction de la variante II; le paragraphe 6 achève la construction de la variante I-C.

La deuxième partie de l'exposé est consacrée aux programmes FORTRAN (paragraphes 7 et 8). Pour chaque variante, le programme peut résoudre le problème d'interpolation 1.2-(iii) et peut déterminer la base d'Hermite de V. Chaque programme est précédé d'un mode d'emploi. Il est possible d'aborder directement la lecture de cette partie et d'utiliser les programmes sans avoir préalablement étudié la construction.

La troisième partie analyse l'ordre de l'erreur d'interpolation (paragraphe 9). Nous montrerons que nos éléments finis satisfont aux majorations usuelles pour des éléments de degré deux.

L'exposé s'achève par des remarques sur l'intégration numérique au moyen de tableaux de référence (paragraphe 10).

1.4. Application à l'équation biharmonique.

Soit le problème de la dynamique des fluides

$$\Delta^2 u = f \text{ dans } \Omega$$

$$u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \partial\Omega$$

où Ω est un polyèdre ouvert borné connexe dans $\mathbb{R}^3$, $f \in L^2(\Omega)$ et $\frac{\partial}{\partial \nu}$ est la dérivée normale au bord de Ω. Ce problème est considéré sous la forme variationnelle

trouver $u \in H_o^2(\Omega)$ tel que $\forall v \in H_o^2(\Omega)$

$$a(u,v) = b(v)$$

où $a: H_o^2(\Omega) \times H_o^2(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$, $a(u,v) := \int_\Omega \Delta u \, \Delta v$,

$b: H_o^2(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$, $b(v) := \int_\Omega fv$.

La forme bilinéaire continue a est $H_o^2(\Omega)$-elliptique, c'est-à-dire $\exists c > 0$ tel que

$$\forall v \in H_o^2(\Omega) \quad a(v,v) \geqslant c \, ||v||_{2,\Omega}^2 .$$

Pour une suite régulière de mosaïques $\{S_{1,n},\ldots,S_{K_n,n}\}, n \in \mathbb{N}$, sur Ω (voir 9.5), définissons $h_n := \max_{k=1(1)K_n} \operatorname{diam}(S_{k,n})$;

désignons par V_n l'espace des fonctions de type élément fini v_n associées à la n-ème mosaïque et satisfaisant

$$v_n|_{\partial\Omega} = \frac{\partial v_n}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Omega} = 0.$$

Le problème discrétisé selon la méthode de RAYLEIGH - RITZ-GALERKIN s'énonce

trouver $u_n \in V_n$ tel que $\forall v_n \in V_n$

$a(u_n,v_n) = b(v_n)$.

A partir du théorème 9.5, on démontre le théorème suivant par des arguments classiques.

Théorème.

(i) $\lim_{n\to\infty} ||u-u_n||_{2,\Omega} = 0$;

(ii) il existe une constante c ne dépendant que de Ω et de la suite des mosaïques telle que si $u \in H^3(\Omega) \cap H^2_o(\Omega)$ alors $\forall n \in \mathbb{N}$

$$||u-u_n||_{2,\Omega} \leqslant c\ h_n\ |u|_{3,\Omega}.$$

Remarque.

Dans [4], CIARLET et RAVIART ont décrit une méthode non conforme pour résoudre l'équation biharmonique à n variables. Pour obtenir une majoration analogue à (ii) ci-dessus, ils ont dû supposer $u \in H^2_o(\Omega) \cap H^4(\Omega)$.

§ 2 INTERPOLATION LINEAIRE ABSTRAITE.

Nous dégageons ici certains aspects de l'interpolation linéaire qui relèvent de l'algèbre linéaire.

2.1. Problème d'interpolation linéaire; paramètres.

Soit W un espace vectoriel réel. On appelle problème d'interpolation linéaire (abstrait) une application linéaire $Q: W \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Les composantes $Q_1,\ldots,Q_n$ de Q sont des formes linéaires appelées paramètres du problème d'interpolation Q. Tout élément fini comporte un problème d'interpolation.

2.2. Problème d'interpolation unisolvant.

Soit V un sous-espace linéaire de W. Un problème d'interpolation linéaire $Q: W \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est dit V-unisolvant lorsque, pour tout $c \in \mathbb{R}^n$, il existe un et un seul $v \in V$ tel que $Qv = c$. En d'autres termes, la restriction de Q à V est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Les paramètres $\{Q_1,\ldots,Q_n\}$ constituent une base du dual de V.

Exemple.

Soient $A_1, A_2 \in \mathbb{R}$, $A_1 \neq A_2$,

S l'intervalle fermé d'extrémités A_1, A_2,

$W := \{w: S \longrightarrow \mathbb{R};\ w \text{ polynôme de degré} \leqslant 3\}$,

$$Q: W \longrightarrow \mathbb{R}^4, \qquad Qw := \begin{pmatrix} w\ (A_1) \\ w'(A_1) \\ w\ (A_2) \\ w'(A_2) \end{pmatrix}.$$

Nous montrerons, sous 2.3, que ce problème est W-unisolvant, c'est-à-dire pour $c \in \mathbb{R}^4$ donné, il existe un et un seul polynôme w de degré $\leqslant 3$ tel que $Qw = c$.

2.3. Base d'interpolation, matrice d'interpolation.

Soit $Q: W \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un problème d'interpolation linéaire. A tout ensemble ordonné de n éléments $(u_1,\ldots,u_n)$ de W, on associe une matrice $n \times n$

$$(Q(u_1),\ldots,Q(u_n)) = \begin{pmatrix} Q_1(u_1) & \ldots & Q_1(u_n) \\ \ldots & & \\ Q_n(u_1) & \ldots & Q_n(u_n) \end{pmatrix} .$$

Lorsque cette matrice est inversible, l'ensemble ordonné $(u_1,\ldots,u_n)$ est appelé <u>base d'interpolation</u> de Q. Dans ce cas, la matrice

$$[Q] = (Q(u_1),\ldots,Q(u_n))$$

est appelée <u>matrice d'interpolation</u> de Q relativement à la base $(u_1,\ldots,u_n)$.

Relevons les propriétés suivantes. Les éléments d'une base d'interpolation $\{u_1,\ldots,u_n\}$ sont linéairement indépendants dans W. Notons U le sous-espace vectoriel de W engendré par $\{u_1,\ldots,u_n\}$. La restriction $Q: U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. La matrice d'interpolation $[Q]$ est la matrice de $Q_{|U}$ relativement à la base ordonnée $(u_1,\ldots,u_n)$ de U et la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Pratiquement, l'équation $Qu = c$ est résolue dans ce système de coordonnées

$$[Q]\ [u] = c$$

où $[u]$ désigne les composantes de u dans la base ordonnée $(u_1,\ldots,u_n)$.

Exemple.

Reprenons l'exemple 2.2. Notons $x_1 := A_1$, $x_2 := A_2$, $h := x_2 - x_1$.

Pour les quatre éléments de W

$u_1(x) := 1$

$u_2(x) := (x-x_1)$

$u_3(x) := (x-x_1)^2$

$u_4(x) := (x-x_1)^2 \; (x-x_2)$,

la matrice d'interpolation est triangulaire inférieure

$$[Q] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & h & h^2 & 0 \\ 0 & 1 & 2h & h^2 \end{pmatrix} .$$

Dans cet exemple, U = W et le problème d'interpolation est W-unisolvant.

Soit $c := (0,0,1,0)^T$. La résolution de $Qu = c$ s'opère en deux temps;

(i) on résoud $[Q]s = c$; on trouve

$s = (0,0,h^{-2}, 2h^{-3})^T \in \mathbb{R}^4$;

(ii) on pose $u = \sum_{i=1}^{4} s_i \, u_i$; on trouve

$$u(x) = \frac{1}{h^2}(x-x_1)^2 - \frac{2}{h^3}(x-x_1)^2(x-x_2).$$

2.4. Un théorème fondamental.

Soit $Q: W \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un problème d'interpolation linéaire. Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes:

(i) le problème Q est W-unisolvant;

(ii) dim $W \geqslant n$ et la solution $w = 0$ de $Qw = 0$ est unique;

(iii) dim $W \leqslant n$ et Q possède une base d'interpolation.

Pour démontrer ce théorème, il suffit de le récrire dans la terminologie usuelle de l'algèbre linéaire:

(i) Q est un isomorphisme d'espaces vectoriels;

(ii) dim $W \geqslant n$ et Q est injectif;

(iii) dim $W \leqslant n$ et Q est surjectif.

2.5. Complétion d'une base d'interpolation à l'aide d'un groupe d'automorphismes.

Proposition.

Soit $\{E_1, \ldots, E_m\}$ un groupe de m automorphismes $E_i: W \longrightarrow W$ relativement à la composition, d'élément neutre E_1 = identité.

$$\text{Soit } Q := \begin{pmatrix} F \circ E_1 \\ \cdots \\ F \circ E_m \\ G \end{pmatrix} \qquad \text{où } \begin{cases} F: W \longrightarrow \mathbb{R}^p, \\ G: W \longrightarrow \mathbb{R}^q, \\ n := mp + q. \end{cases}$$

Nous supposons que

$$(Q(u_1), \ldots, Q(u_p)) = \begin{pmatrix} M_1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ N_1 \end{pmatrix}, \qquad (Q(v_1), \ldots, Q(v_q)) = \begin{pmatrix} 0 \\ \\ \cdots \\ 0 \\ M_o \end{pmatrix},$$

où M_1 est une matrice p×p inversible,

N_1 désigne une matrice q×p quelconque,

M_o est une matrice q×q inversible.

Alors

(i) $(u_1,\ldots,u_p,E_2^{-1}u_1,\ldots,E_2^{-1}u_p,\ldots,E_m^{-1}u_1,\ldots,E_m^{-1}u_p,v_1,\ldots,v_q)$ est une base d'interpolation de Q;

(ii) la matrice d'interpolation relative à cette base est de la forme

$$[Q] = \left(\begin{array}{ccc|c} M_1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & M_1 & \\ \hline N_1 & \cdots & N_m & M_o \end{array}\right),$$

où $N_2,\ldots,N_m$ sont des matrices q×p.

Cette proposition est également valable pour q = 0.

<u>Démonstration.</u>

Pour démontrer la proposition, nous calculons l'image par Q des n vecteurs proposés sous (i) et nous montrons que la matrice d'interpolation correspondante est de la forme (ii), donc inversible.

Il suffit de considérer le premier bloc diagonal mp × mp de Q; les blocs diagonaux p×p de cette matrice sont

$$(FE_i(E_i^{-1}u_1),\ldots,FE_i(E_i^{-1}u_p))$$

$$= (F\,u_1,\ldots,F\,u_p) = M_1, \quad i = 1(1)m;$$

les blocs non diagonaux p×p de cette matrice sont

$$(FE_i(E_j^{-1}\ u_1),\ldots,FE_i(E_j^{-1}\ u_p))$$

$$= (FE_{\sigma(i,j)}\ u_1,\ldots,FE_{\sigma(i,j)}\ u_p) = 0;$$

en effet, lorsque $i \neq j$, $E_{\sigma(i,j)} := E_i \circ E_j^{-1}$ n'est pas l'élément neutre.



Exemple.

Soient $\tilde{W} := \{w: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\ w \text{ polynôme de degré} \leqslant 3\}$,

$$\alpha_1,\alpha_2: [0,1] \longrightarrow [0,1],\ \alpha_1(x) := x,\ \alpha_2(x) := 1-x,$$

$$E_1,E_2: \tilde{W} \longrightarrow \tilde{W},\ E_i(w) := w \circ \alpha_i,\ i = 1,2,$$

$$\tilde{F}: \tilde{W} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \tilde{F}w := \begin{pmatrix} w(0) \\ w'(0) \end{pmatrix}.$$

Nous considérons le problème d'interpolation

$$\tilde{Q}w := \begin{pmatrix} \tilde{F}E_1 \\ \tilde{F}E_2 \end{pmatrix} (w) = \begin{pmatrix} w\ (0) \\ w'(0) \\ w\ (1) \\ -w'(1) \end{pmatrix}.$$

Nous choisissons la première partie d'une base d'interpolation

$$\tilde{u}_1(x) := (1-x)^3,$$

$$\tilde{u}_2(x) := (1-x)^2\ x.$$

Nous obtenons

$$(Q(\tilde{u}_1),Q(\tilde{u}_2)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où la matrice $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ est régulière.

La proposition ci-dessus nous suggère de compléter la base d'interpolation comme suit:

$$\tilde{u}_3(x) = (E_2^{-1}(\tilde{u}_1))(x) = \tilde{u}_1 \circ \alpha_2^{-1}(x) = x^3,$$

$$\tilde{u}_4(x) = (E_2^{-1}(\tilde{u}_2))(x) = \tilde{u}_2 \circ \alpha_2^{-1}(x) = x^2(1-x).$$

La matrice d'interpolation s'écrit alors

$$[\tilde{Q}] = \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_1 \end{pmatrix}.$$

2.6. Base de Lagrange (et base d'Hermite).

Soit $Q: W \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un problème d'interpolation linéaire. Une base d'interpolation $(v_1,\dots,v_n)$ est appelée base de Lagrange de Q lorsque sa matrice d'interpolation $(Q(v_1),\dots,Q(v_n))$ est l'identité. En d'autres termes, $Q_i(v_j) = \delta_{ij}$, $i,j = 1(1)n$. Les paramètres $(Q_1,\dots,Q_n)$ constituent la base duale de la base $(v_1,\dots,v_n)$. La solution de $Qu = c$ se laisse immédiatement exprimer au moyen de la base de Lagrange

$$u = \sum_{j=1}^{n} c_j\, v_j.$$

Dans le contexte des éléments finis de classe C^k, $k \geqslant 1$, la base de Lagrange est de préférence appelée base d'Hermite.

Pratiquement, la base de Lagrange est déterminée en résolvant n équations

$$Q\, v_j = e_j \quad , \; j = 1(1)n,$$

où $(e_1,\dots,e_n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Exemple 1.

Déterminons la base d'Hermite de l'exemple $\tilde{Q}$ défini sous 2.5.

Nous devons résoudre $[\tilde{Q}]\ [\tilde{v}_j] = e_j$, $j = 1(1)4$; en tirant parti du fait que $[\tilde{Q}]$ est diagonale par blocs et que E_2^{-1} est linéaire, il suffit de calculer l'inverse d'un bloc diagonal;

$$M_1 \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} = \text{identité},$$

$$\tilde{v}_1 = s_{11}\,\tilde{u}_1 + s_{21}\,\tilde{u}_2 ,$$
$$\tilde{v}_2 = s_{12}\,\tilde{u}_1 + s_{22}\,\tilde{u}_2 ,$$
$$\tilde{v}_3 = E_2^{-1}(\tilde{v}_1) = \tilde{v}_1 \circ \alpha_2^{-1},$$
$$\tilde{v}_4 = E_2^{-1}(\tilde{v}_2) = \tilde{v}_2 \circ \alpha_2^{-1}.$$

On trouve

$$\tilde{v}_1(x) = (\tilde{u}_1 + 3\tilde{u}_2)(x) = (1-x)^2(1+2x),$$
$$\tilde{v}_2(x) = \tilde{u}_2(x) = (1-x)^2\ x,$$
$$\tilde{v}_3(x) = x^2(3-2x),$$
$$\tilde{v}_4(x) = x^2(1-x).$$

Exemple 2.

Calculons la base d'Hermite de l'exemple 2.2. Notons $x_1 := A_1$, $x_2 := A_2$, $h := x_2 - x_1$, $L: [0,1] \longrightarrow S$, $L(x) := xh + x_1$. Nous choisissons la base d'interpolation

$$u_i := \tilde{v}_i \circ L^{-1},\ i = 1(1)4,$$

où les $\tilde{v}_i$ constituent la base d'Hermite de l'exemple 1. Remarquons que

$$u'_{2i} = (\tilde{v}_2 \circ \alpha_i^{-1} \circ L^{-1})'$$
$$= (x_j - x_i)^{-1}\ \tilde{v}'_2 \circ \alpha_i^{-1} \circ L^{-1},\ i = 1,2,$$

où (i,j) est une permutation cyclique de (1,2). Par rapport à cette base, la matrice d'interpolation est diagonale $\text{diag}\,[Q] = (1,\ (x_2-x_1)^{-1},\ 1,\ (x_1-x_2)^{-1})$.

La base d'Hermite s'écrit

$$v_{2i-1} = u_{2i-1} = \tilde{v}_{2i-1} \circ L^{-1},$$

$$v_{2i} = (x_j-x_i)\, u_{2i} = (x_j-x_i)\, \tilde{v}_{2i} \circ L^{-1},$$

(i,j) permutation cyclique de (1,2), i = 1,2.

2.7. Problème d'interpolation avec contraintes linéaires.

Soit $Q := \begin{bmatrix} F \\ H \end{bmatrix}$ où $\begin{cases} F\colon W \longrightarrow \mathbb{R}^p, \\ H\colon W \longrightarrow \mathbb{R}^q, \end{cases}$

sont des appliquations linéaires. Supposons que le problème d'interpolation $Q\colon W \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $n := p + q$, soit W-unisolvant. Alors le problème

$$F\colon \ker H \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

est ker H-unisolvant. En effet, $Fw = c$ et $Hw = 0$ si et seulement si $Qw = \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix}$. En particulier, $\dim(\ker H) = p$. Les q équations linéaires $Hw = 0$ sont appelées les <u>contraintes linéaires</u> du problème $F\colon \ker H \longrightarrow \mathbb{R}^p$.

2.8. Remplacement de certains paramètres par des contraintes linéaires.

Soit $Q := \begin{bmatrix} F \\ G \end{bmatrix}$ où $\begin{cases} F\colon W \longrightarrow \mathbb{R}^p, \\ G\colon W \longrightarrow \mathbb{R}^q, \end{cases}$

sont des applications linéaires. Supposons que le problème d'interpolation $Q\colon W \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $n := p + q$, soit W-unisolvant.

Soient $E_1 : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$ un homomorphisme et

$E_2 : \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^q$ un automorphisme.

La construction ci-dessous consiste à remplacer les paramètres $G_1, \dots, G_q$ par les q contraintes linéaires $E_2 \, Gw = E_1 \, Fw$.

Soient $E := [-E_1 \, , \, E_2] : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^q$,

$H : W \longrightarrow \mathbb{R}^q$, $\quad H := EQ = -E_1 \, F + E_2 \, G$.

Le problème d'interpolation

$F : \ker H \longrightarrow \mathbb{R}^p$

est ker H-unisolvant. En effet,

$$\begin{bmatrix} F \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ -E_1 & E_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ G \end{bmatrix}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels, et l'on se trouve dans la situation de 2.7.

Pratiquement, la solution $w \in \ker H$ de $Fw = c \in \mathbb{R}^p$ est déterminée en résolvant successivement les équations

$$E_2 \, c_2 = E_1 \, c,$$

$$Q \; w = \begin{bmatrix} c \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

L'application linéaire $T : \mathbb{R}^p \longrightarrow W$, $T(c) := w$, peut s'écrire

$$T = Q^{-1} \begin{pmatrix} I_p \\ E_2^{-1} \circ E_1 \end{pmatrix}.$$

Exemple.

Soient $x_1 < x_2 < x_3$ dans $\mathbb{R}$,

$$W:= \{w: [x_1,x_3] \longrightarrow \mathbb{R};\ w \text{ polynôme de degré} \leqslant 2\},$$

$$Fw:= \begin{bmatrix} w(x_1) \\ w(x_3) \end{bmatrix},$$

$$Gw:= w(x_2).$$

Le problème $Q:= \begin{bmatrix} F \\ G \end{bmatrix} : W \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est unisolvant. Sa base de Lagrange est

$$v_1(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)},$$

$$v_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)},$$

$$v_3(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}.$$

Soit $p: [x_1,x_3] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux, non négative, avec $\int_{x_1}^{x_3} p(x)\,dx > 0$.

Nous allons remplacer G par la contrainte linéaire "l'intégrale de w par rapport à la fonction de poids p satisfait à la règle du trapèze", c'est-à-dire

$$\int_{x_1}^{x_3} w(x)p(x)dx = (x_3-x_1) \cdot \frac{1}{2} \{p(x_1)w(x_1) + p(x_3)w(x_3)\}.$$

Introduisons les nombres

$$\alpha_i := \int_{x_1}^{x_3} v_i(x)p(x)dx,\ i = 1,2,3.$$

Pour $w \in W$, l'intégrale s'écrit

$$\int_{x_1}^{x_3} w(x)p(x)dx = \alpha_1 F_1 w + \alpha_2 F_2 w + \alpha_3 Gw.$$

Dans W, la contrainte prend la forme d'une équation linéaire

$$\alpha_3 Gw = e_1 F_1 w + e_2 F_2 w$$

où $e_1 := (x_3-x_1) \frac{1}{2} p(x_1) - \alpha_1$,

$e_2 := (x_3-x_1) \frac{1}{2} p(x_3) - \alpha_2$.

Pour cet exemple, $E_1 = (e_1,e_2)$ et $E_2 = (\alpha_3)$.

Comme $v_3(x) > 0$ dans $]x_1,x_3[$, on peut affirmer que $\alpha_3 > 0$.

La solution de "$Fw = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$,

$w \in W$ et w satisfait à la contrainte linéaire précitée"

est $w = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3$

où $c_3 = \frac{1}{\alpha_3} (e_1 c_1 + e_2 c_2)$.

Remarquons enfin que, dans le cas particulier où p = constante > 0, la contrainte peut s'écrire

$$Gw = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} F_1 w + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} F_2 w ,$$

ce qui signifie que w doit être un polynôme de degré $\leqslant 1$.

§ 3 ELEMENTS FINIS TRIANGULAIRES DE CLASSE C^1.

3.1. Introduction

Dans ce paragraphe, nous présentons la construction de deux éléments finis triangulaires de classe C^1 à neuf paramètres. Le premier élément triangulaire possède des fonctions de référence polynomiales par morceaux (CLOUGH, TOCHER, [5]); il servira à construire la variante I de l'élément fini tétraédrique. Le deuxième élément triangulaire possède des fonctions de référence rationnelles (BAZELEY, CHEUNG, IRONS, ZIENKIEWICZ, [1]); il servira à construire la variante II de l'élément fini tétraédrique.

Nous aurions également pu utiliser l'élément triangulaire à quinze paramètres de G. BIRKHOFF, L. MANSFIELD [2]. Mais il conduit à une variante III de l'élément tétraédrique qui ressemble beaucoup à la variante II et qui ferait double emploi avec celle-ci.

Les éléments triangulaires de ce paragraphe seront appelés à jouer deux rôles par la suite.

(i) (Raccordement.) L'élément bidimensionnel associé aux faces du tétraèdre doit correspondre à un élément fini connu de classe C^1. L'élément fini triangulaire est utilisé afin d'assurer la classe C^0 de l'élément tétraédrique ainsi que la différentiabilité du raccordement le long des arêtes communes à deux tétraèdres.

(ii) (Motivation.) Les éléments finis triangulaires vont servir de point de départ dans la construction des éléments tétraédriques. Nous avons mis en évidence les aspects architec-

turaux de la construction qui sont généralisables de la dimension deux à la dimension trois. Les fonctions de référence sur le triangle sont utiles pour trouver des fonctions de référence sur le tétraèdre.

3.2. Notations.

Le triangle générique.

Soit $T \subset \mathbb{R}^2$ un triangle fermé, non dégénéré, de sommets $A_i = (x_i, y_i)$, $i = 1,2,3$. Notons B_1, B_2, B_3 les milieux des côtés opposés à A_1, A_2, A_3 respectivement. Soient n_1, n_2, n_3 les vecteurs normaux aux côtés opposés à A_1, A_2, A_3 respectivement;

$$n_i := \frac{1}{N_i} \begin{pmatrix} y_j - y_k \\ x_k - x_j \end{pmatrix} \quad \text{où } N_i := \sqrt{(x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2}$$

et (i,j,k) est une permutation cyclique de $(1,2,3)$, $i = 1,2,3$; ils pointent vers l'intérieur si le triplet (A_1, A_2, A_3) est direct et vers l'extérieur si ce triplet est rétrograde (voir fig. 3.2-1).

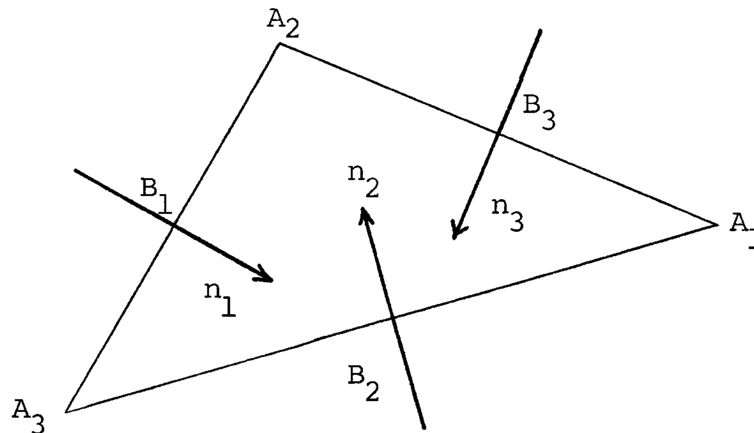


Fig. 3.2-1. Triangle générique.

Les paramètres génériques.

Nous utiliserons les douze paramètres suivants

$$Q:\ C^1(T) \longrightarrow \mathbb{R}^{12}, \qquad Qw := \begin{bmatrix} w(A_1) \\ \partial_x\, w(A_1) \\ \partial_y\, w(A_1) \\ w(A_2) \\ \partial_x\, w(A_2) \\ \partial_y\, w(A_2) \\ w(A_3) \\ \partial_x\, w(A_3) \\ \partial_y\, w(A_3) \\ \partial_{n_1} w(B_1) \\ \partial_{n_2} w(B_2) \\ \partial_{n_3} w(B_3) \end{bmatrix} .$$

Les trois derniers paramètres sont des paramètres auxiliaires désignés par G_1, G_2, G_3.

Le triangle de référence.

Le triangle $\tilde{T}$ de sommets $\tilde{A}_1 := (0,0)$, $\tilde{A}_2 := (1,0)$, $\tilde{A}_3 := (0,1)$ est appelé triangle de référence. Soit $L: \tilde{T} \longrightarrow T$ l'application affine

$$L \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} .$$

Soit $\alpha_i: \tilde{T} \longrightarrow \tilde{T}$ l'application affine effectuant une permutation cyclique de la numérotation des sommets avec $\alpha_i(\tilde{A}_1) = \tilde{A}_i$, $i = 1,2,3$;

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \alpha_2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-x-y \\ x \end{bmatrix}, \quad \alpha_3 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ 1-x-y \end{bmatrix} .$$

Notons ϕ_i la partie linéaire de l'application affine α_i , i = 1,2,3. Définissons $\tilde{e}_{11} := (1,0)$, $\tilde{e}_{12} := (0,1)$; $\tilde{e}_{ij} := \phi_i(\tilde{e}_{1j})$, i = 1,2,3, j = 1,2; $\tilde{n}_1 := (-1,-1)$, $\tilde{n}_i := \phi_i(\tilde{n}_1)$, i = 1,2,3 (voir fig. 3.2-2). $\tilde{B}_i$ désigne le milieu du côté opposé à $\tilde{A}_i$, i = 1,2,3.

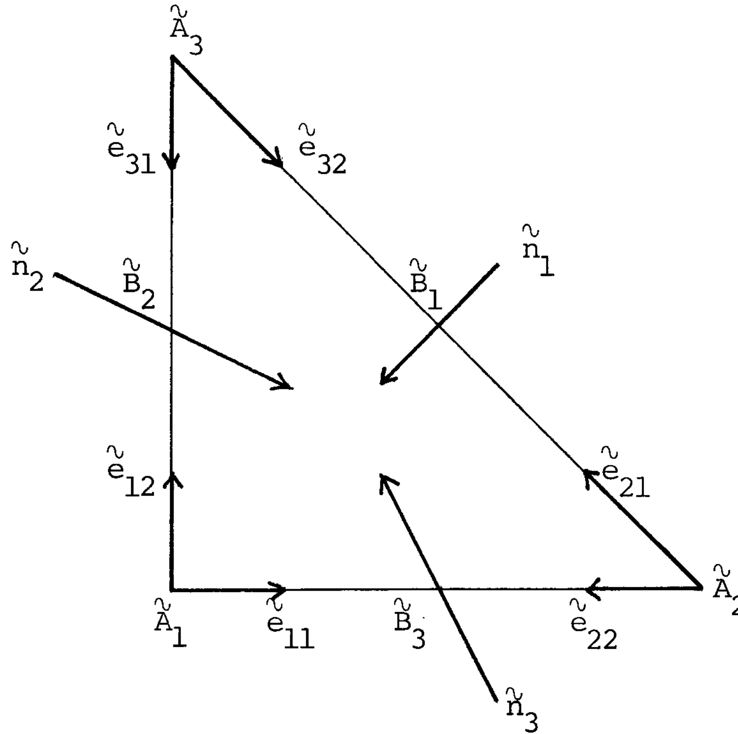


Fig. 3.2-2. Triangle de référence.

Les paramètres de référence.

Nous utiliserons les douze paramètres suivants

$$\tilde{Q} := \begin{pmatrix} \tilde{F}_{1o} \\ \tilde{F}_{11} \\ \tilde{F}_{12} \\ \tilde{F}_{20} \\ \tilde{F}_{21} \\ \tilde{F}_{22} \\ \tilde{F}_{30} \\ \tilde{F}_{31} \\ \tilde{F}_{32} \\ \tilde{G}_1 \\ \tilde{G}_2 \\ \tilde{G}_3 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{Q}: C^1(\tilde{T}) \longrightarrow \mathbb{R}^{12}, \\ \tilde{F}_{io}(v) := v(\tilde{A}_i), \\ \tilde{F}_{ij}(v) := \partial_{\tilde{e}_{ij}} v(\tilde{A}_i), \\ \tilde{G}_i(v) := \partial_{\tilde{n}_i} v(\tilde{B}_i), \\ j = 1,2, \quad i = 1,2,3. \end{array} \right.$$

Les trois derniers paramètres sont des paramètres auxiliaires.

Nous utiliserons également un quatrième paramètre auxiliaire

$$\tilde{K}(v) := v(\tfrac{1}{3}\ ,\ \tfrac{1}{3}).$$

En vue d'utiliser la construction 2.5, introduisons les changements de variables

$$E_i : C^1(\tilde{T}) \longrightarrow C^1(\tilde{T}),$$

$$E_i(v) = v \circ \alpha_i \ , \ i = 1,2,3.$$

Notons $w := 1-x-y$; le triplet (w,x,y) représente les coordonnées barycentriques du point $(x,y) \in \tilde{T}$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = w\,\tilde{A}_1 + x\,\tilde{A}_2 + y\,\tilde{A}_3 \ ,$$

$$w,x,y \geqslant 0, \quad w+x+y = 1.$$

En écrivant la fonction $v(x,y)$ en coordonnées barycentriques $v(w,x,y)$, les applications $E_i^{-1}(v) = v \circ \alpha_i^{-1}$ effectuent la i-ème permutation cyclique des coordonnées barycentriques

$$E_1^{-1}\ v(w,x,y) = v(w,x,y),$$

$$E_2^{-1}\ v(w,x,y) = v(x,y,w),$$

$$E_3^{-1}\ v(w,x,y) = v(y,w,x).$$

Relativement à la composition, $\{E_1,E_2,E_3\}$ est un groupe cyclique isomorphe à $\mathbb{Z}$ modulo 3.

Lemme.

Les paramètres satisfont

$$\tilde{F}_{ij} = \tilde{F}_{1j} \circ E_i \ , \quad j = 0,1,2,$$

$$\tilde{G}_i = \tilde{G}_1 \circ E_i \ , \quad i = 1,2,3.$$

Démonstration.

Pour $j = 1,2$,

$$\tilde{F}_{1j} \circ E_i(v) = \tilde{F}_{1j}(v \circ \alpha_i) = \partial_{\tilde{e}_{1j}}(v \circ \alpha_i)\ (\tilde{A}_1)$$

$$= \partial_{\phi_i(\tilde{e}_{1j})} v\ (\alpha_i\ \tilde{A}_1)$$

$$= \partial_{\tilde{e}_{ij}}\ v\ (\tilde{A}_i) = \tilde{F}_{ij}(v),$$

$i = 1(1)4$. Les autres égalités se démontrent de façon analogue.



3.3. Enoncé du problème élément fini triangulaire de classe C^1, de degré deux, à neuf paramètres.

Nous cherchons un espace vectoriel $V = V(T)$ de fonctions continûment différentiables $v: T \longrightarrow \mathbb{R}$ possédant les propriétés suivantes.

(i) Les fonctions de V sont de classe C^2 presque partout; leurs dérivées partielles d'ordre deux sont bornées.

(ii) V contient tous les polynômes de degré $\leqslant 2$ à deux variables.

(iii) (Problème d'interpolation linéaire.) Pour neuf nombres réels donnés $c_1, \ldots, c_9$, il existe un et un seul élément v de V tel que

$$v(A_i) = c_{3i-2}, \quad \partial_x v(A_i) = c_{3i-1},$$
$$\partial_y v(A_i) = c_{3i}, \quad i = 1,2,3.$$

(iv) (Conditions de raccordement.) Les restrictions de $v \in V$ aux côtés du triangle sont des polynômes de degré $\leqslant 3$ à une variable. La restriction de la dérivée normale $\partial_{n_i} v$ au côté opposé à A_i est un polynôme de degré $\leqslant 1$ à une variable, $i = 1,2,3$.

(v) (Passage du triplet (A_1,A_2,A_3) au triangle T.) L'espace V et la solution $v \in V$ du problème d'interpolation (iii) ne dépendent pas de la numérotation des trois sommets de T.

Remarque.

Comme nous l'avons fait sous 1.2 pour le problème élément fini sur un tétraèdre, nous pouvons définir ici, de façon analogue, ce que sont

- un élément fini générique solution $(T,Q(T),V(T))$,
- l'espace de type élément fini associé à une triangulation,
- un élément fini générique de classe C^k, $k = 0,1$,
- l'interpolation globale associée à une triangulation.

Construction de l'élément fini.

La solution de ce problème élément fini est construite en quatre étapes.

Nous commençons par résoudre un problème d'interpolation à neuf paramètres sur un espace purement polynomial (3.4); l'élément fini générique correspondant est de classe C^0, mais n'est pas de classe C^1.

Sur le triangle de référence, nous introduisons trois paramètres supplémentaires $\tilde{G}_1,\tilde{G}_2,\tilde{G}_3$ et trois fonctions auxiliaires non polynomiales $\tilde{u}_{10},\tilde{u}_{11}$ et $\tilde{u}_{12}$ (3.5). L'élément générique correspondant (3.6) est de classe C^1, de degré deux, à douze paramètres. Nous remplaçons les trois paramètres génériques supplémentaires G_1,G_2,G_3 par des contraintes linéaires et obtenons la solution du problème sous 3.7.

3.4. Eléments finis polynomiaux.

Elément polynomial de degré trois.

Les dix paramètres

$$\tilde{F}_{10},\tilde{F}_{11},\tilde{F}_{12},\tilde{F}_{20},\tilde{F}_{21},\tilde{F}_{22},\tilde{F}_{30},\tilde{F}_{31},\tilde{F}_{32},\ \tilde{K}$$

(voir 3.2) définissent un problème d'interpolation Π_3-unisolvant sur l'espace

$$\Pi_3 := \{v\colon \tilde{T} \longrightarrow \mathbb{R};\ v \text{ polynôme de degré} \leqslant 3\}.$$

La base de Lagrange de ce problème est déterminée au moyen de 2.5 et 2.6;

$$\tilde{v}_{10}(x,y) = (1-x-y)\ (1+x+y-2x^2-11xy-2y^2),$$

$$\tilde{v}_{11}(x,y) = x(1-x-y)\ (1-x-2y),$$

$$\tilde{v}_{12}(x,y) = \tilde{v}_{11}\ (y,x),$$

$$\tilde{v}_{ij} = \tilde{v}_{1j} \circ \alpha_i^{-1},\ i = 1,2,3,\quad j = 0,1,2,$$

$$\tilde{k}(x,y) = 27\ xy\ (1-x-y).$$

L'élément générique correspondant est de classe C^0 mais n'est pas de classe C^1.

Elément polynomial de degré deux.

Les six paramètres

$$\tilde{F}_{10},\ \tilde{F}_{11} + \tilde{F}_{12},\ \tilde{F}_{20},\ \tilde{F}_{21} + \tilde{F}_{22},\ \tilde{F}_{30},\ \tilde{F}_{31} + \tilde{F}_{32}$$

restreints à l'espace

$$\Pi_2 := \{v\colon \tilde{T} \longrightarrow \mathbb{R},\ v \text{ polynôme de degré} \leqslant 2\}$$

définissent un problème d'interpolation Π_2-unisolvant.

La base de Lagrange de ce problème est déterminée au moyen de 2.5 et 2.6;

$$k_{10}(x,y) = -x^2 - 4xy - y^2 + 1,$$

$$k_{11}(x,y) = \frac{1}{2}\{-x^2 - 3xy - y^2 + x + y\},$$

$$k_{20}(x,y) = k_{10}(y,\ 1-x-y),$$

$$k_{21}(x,y) = k_{11}(y,\ 1-x-y),$$

$$k_{30}(x,y) = k_{10}(1-x-y,\ x),$$

$$k_{31}(x,y) = k_{11}(1-x-y,\ x).$$

L'élément générique correspondant n'est pas de classe C^o.

<u>Corollaire.</u>

Les polynômes de degré $\leqslant$ 2 satisfont

$$\tilde{K}(p) = \sum_{i=1}^{3} \{\frac{1}{3} F_{io} + \frac{1}{18} (\tilde{F}_{i1} + \tilde{F}_{i2})\} (p).$$

<u>Démonstration.</u>

Nous écrivons p dans la base de Lagrange de l'élément polynomial de degré deux

$$\tilde{K}(p) = \tilde{K} \left(\sum_{i=1}^{3} \{\tilde{F}_{io}(p)\ k_{io} + (\tilde{F}_{i1} + \tilde{F}_{i2})(p)\ k_{i1}\}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \{\tilde{K}(k_{io})\ \tilde{F}_{io}(p) + \tilde{K}(k_{i1})\ (\tilde{F}_{i1} + \tilde{F}_{i2})(p)\}$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \{\frac{1}{3} \tilde{F}_{io} + \frac{1}{18} (\tilde{F}_{i1} + \tilde{F}_{i2})\}(p).$$



<u>Elément polynomial à neuf paramètres.</u>

Dans l'élément polynomial de degré trois, remplaçons le paramètre $\tilde{K}$ par la contrainte linéaire

$$\tilde{K}(v) = \sum_{i=1}^{3} \{\frac{1}{3} \tilde{F}_{io} + \frac{1}{18} (\tilde{F}_{i1} + \tilde{F}_{i2})\}(v).$$

D'après 2.8, ce problème est unisolvant. Sa base de Lagrange est

$$\tilde{p}_{10}(x,y) = (1-x-y)\ \{1+x+y-2\ (x^2+y^2+xy)\},$$

$$\tilde{p}_{11}(x,y) = x(1-x-y)\ (1-x-\frac{y}{2}),$$

$$\tilde{p}_{12}(x,y) = \tilde{p}_{11}(y,x),$$

$$\tilde{p}_{ij} = \tilde{p}_{1j} \circ \alpha_i^{-1},\ i = 1,2,3,\quad j = 0,1,2.$$

D'après le corollaire précédent, l'espace d'interpolation de ce problème contient tous les polynômes de degré $\leqslant 2$.

L'élément générique correspondant est de classe C^0, mais n'est pas de classe C^1.

<u>Remarque.</u>

La contrainte linéaire la plus connue consiste à poser $a_8 = a_9$ dans l'expression

$$p(x,y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2$$
$$+a_7x^3 + a_8x^2y + a_9xy^2 + a_{10}y^3$$

(voir par exemple STRANG et FIX, [12]).

Cette contrainte linéaire diffère de la nôtre.

En effet, pour la fonction de base $\tilde{p}_{11}$, nous avons $a_8 = \frac{3}{2}$ et $a_9 = \frac{1}{2}$.

3.5. Elément triangulaire de référence, élargi à douze paramètres.

Problème élément fini de référence.

Pour les douze paramètres

$$\tilde{F}_{10},\tilde{F}_{11},\tilde{F}_{12},\tilde{F}_{20},\tilde{F}_{21},\tilde{F}_{22},\tilde{F}_{30},\tilde{F}_{31},\tilde{F}_{32},\tilde{G}_{1},\tilde{G}_{2},\tilde{G}_{3}$$

(vor 3.2), nous cherchons un espace vectoriel de fonctions $\tilde{U} \subset C^1(\tilde{T})$ possédant les propriétés suivantes.

(i) Les fonctions de $\tilde{U}$ sont de classe C^2 presque partout; leurs dérivées partielles d'ordre deux sont bornées.

(ii) $\tilde{U}$ contient tous les polynômes de degré ≤ 2.

(iii) Les douze paramètres définissent un problème d'interpolation $\tilde{U}$-unisolvant.

(iv) Les restrictions de $\tilde{u} \in \tilde{U}$ aux côtés du triangle sont des polynômes de degré ≤ 3 à une variable. La restriction de la dérivée directionnelle $\partial_{\tilde{n}_i}\tilde{u}$ au côté opposé à $\tilde{A}_i$ est un polynôme de degré ≤ 2 à une variable, $i = 1,2,3$.

(v) Soient $P_1,\ldots,P_6$ les applications affines de $\tilde{T}$ dans $\tilde{T}$ qui effectuent une permutation des sommets $\tilde{A}_1,\tilde{A}_2,\tilde{A}_3$. Alors, $\tilde{u}\circ P_i \in \tilde{U}$ $\forall \tilde{u} \in \tilde{U}$, $i = 1(1)6$.

Construction de la base d'interpolation de l'élément de référence.

Nous construisons la base de deux espaces $\tilde{U}^{I}$ et $\tilde{U}^{II}$ satisfaisant aux cinq conditions ci-dessus.

Un aspect fondamental du mode de construction que nous avons adopté est le suivant. Les fonctions d'interpolation sont introduites par blocs. Cette partition des fonctions d'interpolation induit une partition en blocs de la matrice d'interpolation.

Nous choisissons les fonctions d'interpolation de façon que la matrice d'interpolation associée soit triangulaire inférieure par blocs. Pour l'élément de référence, les blocs diagonaux seront des matrices identité. Pour l'élément générique élargi 3.6, les blocs diagonaux seront des matrices carrées inversibles.

Bloc 1: fonctions d'interpolation de référence numéros 1 à 9.
Nous choisissons les 9 polynômes de degré trois construits sous 3.4

$$\tilde{u}_{3i+j-2} := \tilde{p}_{ij} \quad , \; i = 1,2,3, \quad j = 0,1,2.$$

La condition (ii) est ainsi satisfaite. Le premier bloc diagonal 9×9 de la matrice d'interpolation est l'identité

$$[\tilde{Q}] = \left(\begin{array}{c|c} I_9 & ? \\ \hline * & ? \end{array} \right) .$$

Bloc 2: fonctions d'interpolation de référence numéros 10,11,12.
Nous cherchons une fonction $\tilde{w}_1 \in C^1(\tilde{T})$ possédant les propriétés suivantes.

(i) $\tilde{w}_1$ est de classe C^2 presque partout; ses dérivées partielles d'ordre deux sont bornées.

(ii) Les restrictions de $\tilde{w}_1$ aux côtés du triangle de référence sont nulles.

(iii) La restriction de la dérivée directionnelle $\partial_{\tilde{n}_1} \tilde{w}_1$ au côté opposé à $\tilde{A}_1$ est un polynôme de degré $\leqslant 2$ à une variable, prenant les valeurs 0 en $\tilde{A}_2$, 1 en $\tilde{B}_1$ et 0 en $\tilde{A}_3$. Pour $i = 2$ et 3, les restrictions des dérivées $\partial_{\tilde{n}_i} \tilde{w}_1$ au côté opposé à $\tilde{A}_i$ sont nulles.

Une telle fonction permet de construire les trois fonctions d'interpolation restantes

$$\tilde{u}_{10} := \tilde{w}_1 \ , \quad \tilde{u}_{11} := \tilde{w}_1 \circ \alpha_2^{-1}, \quad \tilde{u}_{12} := \tilde{w}_1 \circ \alpha_3^{-1}.$$

La matrice d'interpolation prend alors la forme

$$[\tilde{Q}] = \left[\begin{array}{c|c} I_9 & 0 \\ \hline * & I_3 \end{array} \right].$$

Nous donnons deux exemples de fonctions $\tilde{w}_1$ possédant les propriétés demandées.

Variante I. (CLOUGH, TOCHER [5])

$$\tilde{w}_1^I(x,y) := \begin{cases} \frac{1}{3}(1-x-y)(2-7x-7y+5x^2+16xy+5y^2) & \text{dans } \tilde{T}_1 \ , \\ x^2(y - \frac{1}{3}x) & \text{dans } \tilde{T}_2 \ , \\ y^2(x - \frac{1}{3}y) & \text{dans } \tilde{T}_3 \ . \end{cases}$$

Les triangles $\tilde{T}_1, \tilde{T}_2$ et $\tilde{T}_3$ sont définis dans la figure 3.5

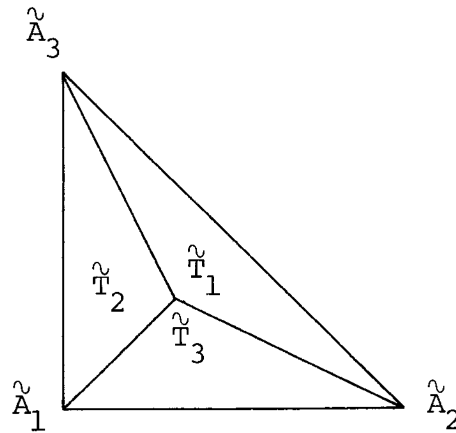


Fig. 3.5. Triangle de référence divisé en trois triangles $\tilde{T}_1, \tilde{T}_2, \tilde{T}_3$ de sommet commun $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

Variante II. (BAZELEY, CHEUNG, IRONS, ZIENKIEWICZ, [1])

$$\tilde{w}_1^{II}(x,y) := \frac{2x^2 y^2 (1-x-y)}{(1-x)(1-y)} .$$

Remarque.

Le comportement de $\tilde{w}_1^{II}$ aux points (1,0) et (0,1) est analogue à celui de l'exemple donné dans 1.1 sous la définition 6.

3.6. Elément triangulaire générique, élargi à douze paramètres.

Nous donnons maintenant deux solutions du problème élément fini de classe C^1

$$Q: C^1(\bar{T}) \longrightarrow \mathbb{R}^{12} \quad \text{(voir 3.2)}.$$

Nous choisissons la base d'interpolation

$$u_i := \tilde{u}_i \circ L^{-1}, \ i = 1(1)12,$$

où les $\tilde{u}_i$ sont les fonctions d'interpolation de référence. Selon que l'on adopte la variante I ou II dans 3.5, nous obtenons

u_i^I, $i = 1(1)12$, polynômes par morceaux,

u_i^{II}, $i = 1(1)12$, fonctions rationnelles.

Notons U^I et U^{II} les espaces vectoriels engendrés par ces 12 fonctions.

Théorème.

Les problèmes d'interpolation élargis $Q: U^I \longrightarrow \mathbb{R}^{12}$ et $Q: U^{II} \longrightarrow \mathbb{R}^{12}$ sont U^I respectivement U^{II}-unisolvants.

Démonstration.

Les matrices d'interpolation de $Q: U^I \longrightarrow \mathbb{R}^{12}$ et de $Q: U^{II} \longrightarrow \mathbb{R}^{12}$, par rapport à leurs bases d'interpolation respectives, sont les mêmes. Cette matrice est triangulaire inférieure par blocs

$$[Q] = \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & & & & & & \\ & D_1^{-1} & & & & & \\ & & 1 & & & & 0 \\ & & & D_2^{-1} & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & D_3^{-1} & \\ \hline & & R & & & & D_4^{-1} \end{array}\right]$$

où D_1, D_2, D_3 sont des matrices 2×2, D_4 une matrice 3×3 et R une matrice 3×9.

<u>Détermination de D_i , i = 1,2,3.</u>

Notons ℓ la partie linéaire de l'application affine L. Soient (i,j,k) une permutation cyclique des nombres (1,2,3) et $\tilde{u} = u \circ L$, $u \in U$.

$$\tilde{Q}_{3i-1}(\tilde{u}) = \tilde{F}_{i1}(\tilde{u}) = \partial_{\tilde{e}_{i1}} (u \circ L)\ (\tilde{A}_i)$$

$$= \partial_{\ell(\tilde{e}_{i1})}\ u\ (A_i)$$

$$= (x_j - x_i)\ Q_{3i-1}(u) + (y_j - y_i)\ Q_{3i}(u).$$

De même,

$$\tilde{Q}_{3i}(\tilde{u}) = (x_k - x_i)\ Q_{3i-1}(u) + (y_k - y_i)\ Q_{3i}(u).$$

Par construction des fonctions d'interpolation de référence, nous avons

$$I_2 = \begin{bmatrix} \tilde{Q}_{3i-1}(\tilde{u}_{3i-1}) & \tilde{Q}_{3i-1}(\tilde{u}_{3i}) \\ \tilde{Q}_{3i}\ (\tilde{u}_{3i-1}) & \tilde{Q}_{3i}\ (\tilde{u}_{3i}) \end{bmatrix}$$

$$= D_i \circ \begin{bmatrix} Q_{3i-1}(u_{3i-1}) & Q_{3i-1}(u_{3i}) \\ Q_{3i}\ (u_{3i-1}) & Q_{3i}\ (u_{3i}) \end{bmatrix}$$

$$\text{où } D_i := \begin{bmatrix} x_j - x_i & y_j - y_i \\ x_k - x_i & y_k - y_i \end{bmatrix}, \quad i = 1,2,3.$$

Détermination de D_4.

Par construction des fonctions d'interpolation de référence, pour i,m = 1,2,3, nous aurons

$$\delta_{im} = \tilde{G}_i(\tilde{u}_{9+m}) = \partial_{\tilde{n}_i}(u_{9+m} \circ L)\ (\tilde{B}_i)$$

$$= \partial_{\ell(\tilde{n}_i)} u_{9+m}\ (B_i)$$

$$= < \ell(\tilde{n}_i),\ n_i > \partial_{n_i}\ u_{9+m}\ (B_i)$$

$$= < \ell(\tilde{n}_i),\ n_i > Q_{9+i}\ (u_{9+m});$$

l'avant-dernière égalité se montre en écrivant le vecteur $\ell(\tilde{n}_i)$ dans une base orthonormée (t_i, n_i); comme u_{9+m} s'annule le long du côté où se trouve B_i , nous aurons

$$\partial_{t_i}\ u_{9+m}\ (B_i) = 0.$$

Les égalités précédentes signifient que D_4 est une matrice diagonale d'éléments diagonaux

$$< \ell(\tilde{n}_i),\ n_i >,\ i = 1,2,3.$$

Dans cette expression, on a

$$\ell(\tilde{n}_i) = \begin{pmatrix} 2x_i - x_j - x_k \\ 2y_i - y_j - y_k \end{pmatrix}.$$



3.7. Elément triangulaire, de classe C^1, de degré deux, à neuf paramètres.

Revenons au problème élément fini 3.3. Dans l'élément générique élargi à douze paramètres 3.6, nous remplaçons les trois paramètres supplémentaires

$$G_1,\ G_2,\ G_3$$

par les trois contraintes linéaires mentionnées sous (iii) ci-dessous.

Nous devons satisfaire la condition 3.3-(iv):

(i) La restriction de la dérivée normale $\partial_{n_i} u$ au côté opposé à A_i est un polynôme de degré $\leqslant 1$ à une variable, $i = 1,2,3$.

En tenant compte du fait que, pour $u \in U$, la restriction de $\partial_{n_i} u$ au côté opposé à A_i est un polynôme de degré $\leqslant 2$ à une variable, la condition à satisfaire s'écrit de façon équivalente

(ii) $\partial_{n_i} u\ (B_i) = \frac{1}{2}\{\partial_{n_i} u\ (A_j) + \partial_{n_i} u\ (A_k)\}$

c'est-à-dire

(iii) $$G_i(u) = \frac{1}{2}\{(n_i)_x\, F_{j1}(u) + (n_i)_y\, F_{j2}(u) + (n_i)_x\, F_{k1}(u) + (n_i)_y\, F_{k2}(u)\}$$

où (i,j,k) est une permutation cyclique des nombres $(1,2,3)$, $i = 1,2,3$.

Précisons comment se calcule la solution de ce problème élément fini avec contraintes (voir 2.8).

Problème d'interpolation.

Soit $c \in \mathbb{R}^9$ donné. Le problème d'interpolation 3.3-(iii) est résolu comme suit.

a) Nous calculons la valeur des trois paramètres remplacés

$$c_{10} = \frac{1}{2}\{(n_1)_x\, c_5 + (n_1)_y\, c_6 + (n_1)_x\, c_8 + (n_1)_y\, c_9\},$$

$$c_{11} = \frac{1}{2}\{(n_2)_x\, c_8 + (n_2)_y\, c_9 + (n_2)_x\, c_2 + (n_2)_y\, c_3\},$$

$$c_{12} = \frac{1}{2}\{(n_3)_x\, c_2 + (n_3)_y\, c_3 + (n_3)_x\, c_5 + (n_3)_y\, c_6\}.$$

b) Nous résolvons le problème à 12 paramètres dans la base d'interpolation du problème 3.6

$$[Q] \begin{pmatrix} s_1 \\ \cdots \\ s_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \cdots \\ c_{12} \end{pmatrix} \quad ;$$

la solution s'écrit alors

$$u = \sum_{j=1}^{12} s_j \, u_j \ .$$

Base d'Hermite.

Pour chaque élément de la base canonique de $\mathbb{R}^9$

$$c \in \{e_1, \ldots, e_9\},$$

nous résolvons le problème d'interpolation 3.3-(iii) comme ci-dessus; à chaque vecteur e_i correspond l'élément v_i de la base d'Hermite, i = 1(1)9. Nous mémorisons la matrice

$$T = (t_{ji}) \ 1 \leqslant j \leqslant 12, \quad 1 \leqslant i \leqslant 9,$$

des coefficients de la base d'Hermite par rapport à la base d'interpolation de l'élément 3.6. La base d'Hermite s'exprime comme suit

$$v_i = \sum_{j=1}^{12} t_{ji} \, u_j \ , \quad i = 1(1)9.$$

L'espace V engendré par $\{v_1, \ldots, v_9\}$ est la solution du problème élément fini 3.3. Selon le choix de la variante I ou II dans 3.5, nous obtiendrons un espace noté V^I ou V^{II}.

Par construction, nous avons démontré le théorème suivant.

Théorème.

Les espaces V^I et V^{II} sont deux solutions du problème élément fini 3.3.

§ 4 ELEMENT POLYNOMIAL DE REFERENCE, DE CLASSE C^o, DE DEGRE DEUX, A 16 PARAMETRES.

Dans ce paragraphe, nous effectuons la première partie de la construction commune aux variantes II et I-C. Nous généralisons en dimension trois les résultats du paragraphe 3.4.

4.1. Notations.

Le tétraèdre de référence.

Le tétraèdre $\tilde{S}$, de sommets $\tilde{A}_1 := (0,0,0)$, $\tilde{A}_2 := (1,0,0)$, $\tilde{A}_3 := (0,1,0)$, $\tilde{A}_4 := (0,0,1)$, est appelé tétraèdre de référence.

Soit $\alpha_i : \tilde{S} \longrightarrow \tilde{S}$ l'application affine effectuant une permutation cyclique de la numérotation des sommets, avec $\alpha_i(\tilde{A}_1) = \tilde{A}_i$, $i = 1(1)4$; α_1 = identité,

$$\alpha_2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-x-y-z \\ x \\ y \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ 1-x-y-z \\ x \end{pmatrix}, \quad \alpha_4 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ z \\ 1-x-y-z \end{pmatrix}.$$

Notons ϕ_i la partie linéaire de l'application affine α_i , $i=1(1)4$.

Désignons par $\tilde{C}_1 := (\frac{1}{3} , \frac{1}{3} , \frac{1}{3})$ le centre de gravité de la face 1 et $\tilde{C}_i := \alpha_i(\tilde{C}_1)$, $i = 1(1)4$. A chaque sommet $\tilde{A}_i$, nous attachons trois vecteurs

$$\tilde{e}_{11} := (1,0,0), \quad \tilde{e}_{12} := (0,1,0), \quad \tilde{e}_{13} := (0,0,1),$$

$$\tilde{e}_{ij} := \phi_i(\tilde{e}_{1j}), \quad j= 1,2,3, \quad i = 1(1)4 \quad \text{(voir fig. 4.1-1)}.$$

Les milieux des arêtes sont

$$\tilde{B}_{11} := (0, \frac{1}{2} , \frac{1}{2}), \quad \tilde{B}_{12} := (\frac{1}{2} , 0 , \frac{1}{2}), \quad \tilde{B}_{13} := (\frac{1}{2} , \frac{1}{2} , 0),$$

$$\tilde{B}_{ij} := \alpha_i(\tilde{B}_{1j}), \quad j = 1,2,3, \quad i = 1(1)4.$$

Pour chaque face, nous définissons un vecteur non parallèle à la face

$$\tilde{m}_1 := (-1,-1,-1), \quad \tilde{m}_i := \phi_i(\tilde{m}_1), \quad i = 1(1)4.$$

En chaque point milieu des arêtes, nous introduisons deux vecteurs parallèles aux faces contenant le point $\tilde{B}_{ij}$

$$\tilde{n}_{11} := (2,-1,-1), \quad \tilde{n}_{12} := (-1,2,-1), \quad \tilde{n}_{13} := (-1,-1,2),$$

$$\tilde{n}_{ij} := \phi_i(\tilde{n}_{1j}), \quad j = 1,2,3, \quad i = 1(1)4.$$

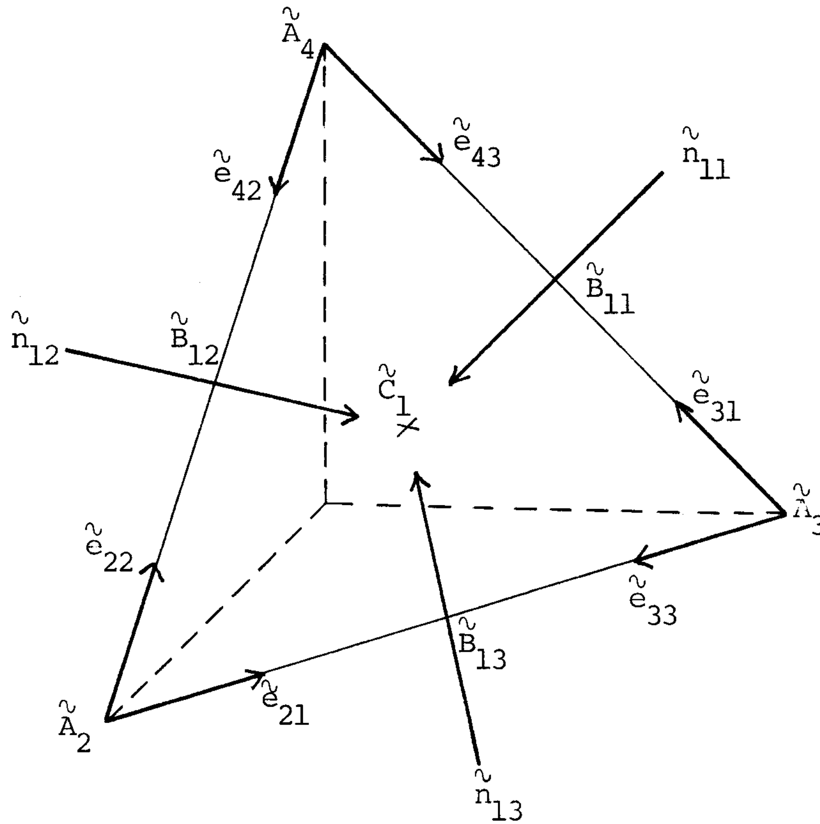


Figure 4.1-1. Tétraèdre de référence.

Les paramètres de référence.

Considérons les paramètres

$$\tilde{F}_{io}(v) := v\,(\tilde{A}_i),$$

$$\tilde{F}_{ij}(v) := \partial_{\tilde{e}_{ij}} v\,(\tilde{A}_i), \quad j = 1,2,3, \quad i = 1(1)4.$$

En vue d'utiliser la construction 2.5, introduisons les changements de variables

$$E_i : C^1(\tilde{S}) \longrightarrow C^1(\tilde{S}),$$

$$E_i(v) := v \circ \alpha_i \ , \quad i = 1(1)4.$$

Notons $w := 1-x-y-z$; le quadruplet (w,x,y,z) représente les coordonnées barycentriques du point $(x,y,z) \in \tilde{S}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = w\,\tilde{A}_1 + x\,\tilde{A}_2 + y\,\tilde{A}_3 + z\,\tilde{A}_4 \ ,$$

$$w,x,y,z \geqslant 0, \quad w+x+y+z = 1.$$

En écrivant la fonction $v(x,y,z)$ en coordonnées barycentriques $v(w,x,y,z)$, les applications $E_i^{-1}(v) = v \circ \alpha_i^{-1}$ effectuent la i-ème permutation cyclique des coordonnées barycentriques

$$E_1^{-1}\ v(w,x,y,z) = v(w,x,y,z),$$

$$E_2^{-1}\ v(w,x,y,z) = v(x,y,z,w),$$

$$E_3^{-1}\ v(w,x,y,z) = v(y,z,w,x),$$

$$E_4^{-1}\ v(w,x,y,z) = v(z,w,x,y).$$

Relativement à la composition, $\{E_1,E_2,E_3,E_4\}$ est un groupe cyclique, isomorphe à $\mathbb{Z}$ modulo 4.

Lemme.

Les paramètres de référence satisfont

$$\tilde{F}_{ij} = \tilde{F}_{1j} \circ E_i \ , \quad j = 0(1)3, \quad i = 1(1)4.$$

Démonstration.

Pour $j = 1,2,3$,

$$\tilde{F}_{1j} \circ E_i\ (v) = \tilde{F}_{1j}\ (v \circ \alpha_i) = \partial_{\tilde{e}_{1j}}\ (v \circ \alpha_i)\ (\tilde{A}_1)$$

$$= \partial_{\phi_i(\tilde{e}_{1j})}\ v\ (\alpha_i\ \tilde{A}_1)$$

$$= \partial_{\tilde{e}_{ij}}\ v\ (\tilde{A}_i) = \tilde{F}_{ij}\ (v).$$

$i = 1(1)4$. Pour $j = 0$, c'est immédiat.



Le tétraèdre générique.

Soit S le tétraèdre donné, de sommets $A_i = (x_i, y_i, z_i)$, $i = 1(1)4$.

Notons $L: \tilde{S} \longrightarrow S$ l'application affine

$$L \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2-x_1 & x_3-x_1 & x_4-x_1 \\ y_2-y_1 & y_3-y_1 & y_4-y_1 \\ z_2-z_1 & z_3-z_1 & z_4-z_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} .$$

Appelons ℓ la partie linéaire de L. Désignons par $B_{ij} := L(\tilde{B}_{ij})$ les points milieu des arêtes, $j = 1,2,3$, $i = 1(1)4$. Soit (i,j,k,ℓ) une permutation cyclique des nombres $(1,2,3,4)$, $i = 1(1)4$. (Les deux significations de ℓ ne peuvent pas prêter à confusion.)

Considérons le vecteur unité, normal à la i-ème face

$$m_i = \frac{\overrightarrow{A_j\ A_k} \times \overrightarrow{A_j\ A_\ell}}{\|\overrightarrow{A_j\ A_k} \times \overrightarrow{A_j\ A_\ell}\|}, \quad i = 1(1)4,$$

ainsi que les trois vecteurs parallèles à la i-ème face et normaux aux arêtes (voir fig. 4.1-2)

$$n_{i1} := m_i \times \frac{\overrightarrow{A_k A_\ell}}{\|\overrightarrow{A_k A_\ell}\|},$$

$$n_{i2} := m_i \times \frac{\overrightarrow{A_\ell A_j}}{\|\overrightarrow{A_\ell A_j}\|},$$

$$n_{i3} := m_i \times \frac{\overrightarrow{A_j A_k}}{\|\overrightarrow{A_j A_k}\|}, \quad i = 1(1)4.$$

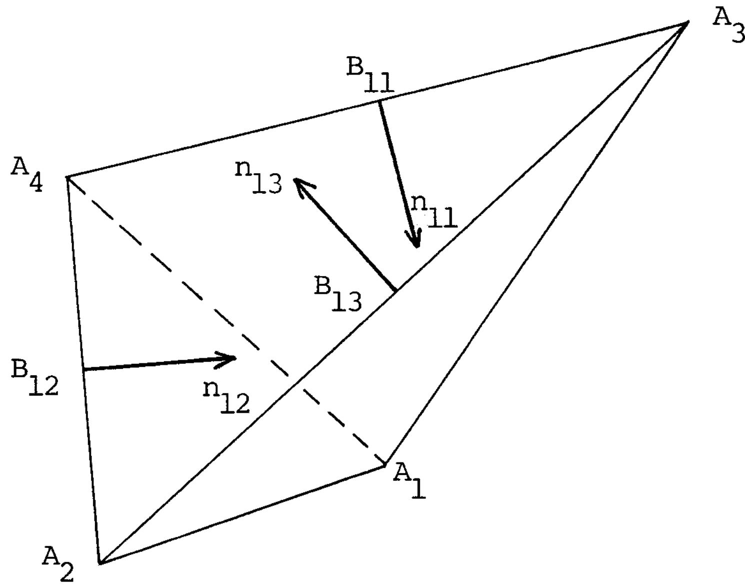


Fig. 4.1-2. Tétraèdre générique.

<u>Les paramètres génériques.</u>

Sur $C^1(S)$, nous considérons les 16 paramètres

$F_{io}(w) := w\ (A_i)$, $\quad F_{i1}(w) := \partial_x\ w\ (A_i)$,

$F_{i2}(w) := \partial_y\ w\ (A_i)$, $\quad F_{i3}(w) := \partial_z\ w\ (A_i)$,

$i = 1(1)4$.

4.2. Elément polynomial de degré trois.

Aux 16 paramètres de référence introduits sous 4.1, nous ajoutons les 4 paramètres auxiliaires

$$\tilde{K}_i(w) := w(\tilde{C}_i), \quad i = 1(1)4.$$

Les 20 paramètres ci-dessus définissent un problème d'interpolation Π_3-unisolvant sur l'espace

$$\Pi_3 := \{v\colon \tilde{S} \longrightarrow \mathbb{R};\ v \text{ polynôme de degré} \leqslant 3\}.$$

La base de Lagrange de ce problème est déterminée au moyen de 2.5 et 2.6;

$$\tilde{v}_{10}(x,y,z) = (1-x-y-z)(1+x+y+z-2x^2-2y^2-2z^2-11xy-11yz-11zx),$$

$$\tilde{v}_{11}(x,y,z) = x(1-x-y-z)(1-x-2y-2z),$$

$$\tilde{v}_{12}(x,y,z) = \tilde{v}_{11}(y,z,x),$$

$$\tilde{v}_{13}(x,y,z) = \tilde{v}_{11}(z,x,y),$$

$$k_1(x,y,z) = 27xyz,$$

$$\tilde{v}_{ij} := \tilde{v}_{1j} \circ \alpha_i^{-1}, \quad j = 0(1)3,$$

$$k_i := k_1 \circ \alpha_i^{-1}, \quad i = 1(1)4.$$

L'élément générique correspondant est de classe C^0, mais n'est pas de classe C^1.

4.3. Elément polynomial à seize paramètres.

Dans l'élément polynomial de degré trois, nous remplaçons les 4 paramètres auxiliaires par 4 contraintes linéaires

$$\tilde{K}_i(v) = \{\frac{1}{3}\tilde{F}_{jo} + \frac{1}{18}(\tilde{F}_{j1} + \tilde{F}_{j2})$$
$$+ \frac{1}{3}\tilde{F}_{ko} + \frac{1}{18}(\tilde{F}_{k1} + \tilde{F}_{k3})$$
$$+ \frac{1}{3}\tilde{F}_{\ell o} + \frac{1}{18}(\tilde{F}_{\ell 2} + \tilde{F}_{\ell 3})\}\ (v)$$

où (i,j,k,ℓ) est une permutation cyclique de $(1,2,3,4)$, $i = 1(1)4$.

D'après 2.8, ce nouveau problème d'interpolation est unisolvant.

Sa base de Lagrange est

$$\tilde{p}_{10}(x,y,z) = (1-x-y-z)\{1+x+y+z-2(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx)\},$$
$$\tilde{p}_{11}(x,y,z) = x(1-x-y-z)\{1-x-\frac{1}{2}(y+z)\},$$
$$\tilde{p}_{12}(x,y,z) = \tilde{p}_{11}\ (y,z,x)$$
$$\tilde{p}_{13}(x,y,z) = \tilde{p}_{11}\ (z,x,y)$$
$$\tilde{p}_{ij} := \tilde{p}_{1j} \circ \alpha_i^{-1}, \quad j = 0(1)3, \quad i = 1(1)4.$$

D'après 3.4, les contraintes linéaires sont satisfaites pour tous les polynômes de degré $\leqslant 2$; ainsi, l'espace d'interpolation de ce problème contient tous les polynômes de degré $\leqslant 2$.

L'élément générique correspondant est de classe C^o, mais n'est pas de classe C^1.

§ 5 VARIANTE II, CONSTRUCTION.

Nous poursuivons la construction annoncée au paragraphe 1 et commencée au paragraphe 4.

5.1. Notations.

Afin de construire des fonctions auxiliaires permettant de corriger les dérivées normales des polynômes de 4.3 sur les faces du tétraèdre générique, nous introduisons des paramètres auxiliaires.

Les paramètres de référence.

Aux 16 paramètres introduits sous 4.1, nous ajoutons les 12 paramètres auxiliaires

$$\tilde{G}_{ij}(w) := \partial_{\tilde{n}_{ij}} w(\tilde{B}_{ij}), \quad j = 1,2,3, \quad i = 1(1)4.$$

Ces 28 paramètres sont ordonnés comme suit

$$\tilde{Q} := \begin{pmatrix} \tilde{F}_{10} \\ \tilde{F}_{11} \\ \cdots \\ \tilde{F}_{42} \\ \tilde{F}_{43} \\ \tilde{G}_{11} \\ \tilde{G}_{12} \\ \cdots \\ \tilde{G}_{42} \\ \tilde{G}_{43} \end{pmatrix}, \quad \tilde{Q}: C^1(\tilde{S}) \longrightarrow \mathbb{R}^{28}.$$

Comme dans le lemme de 4.1, on montre que

$$\tilde{G}_{ij} = \tilde{G}_{1j} \circ E_i, \quad j = 1,2,3, \quad i = 1(1)4.$$

Les paramètres génériques.

Aux 16 paramètres de 4.1, nous ajoutons les 12 paramètres auxiliaires

$$G_{ij}(w) := \partial_{n_{ij}} w(B_{ij}), \quad j = 1,2,3, \quad i = 1(1)4.$$

Ces 28 paramètres sont ordonnés comme suit

$$Q := \begin{pmatrix} F_{10} \\ F_{11} \\ \dots \\ F_{42} \\ F_{43} \\ G_{11} \\ G_{12} \\ \dots \\ G_{42} \\ G_{43} \end{pmatrix}, \quad Q: C^1(S) \longrightarrow \mathbb{R}^{28}.$$

Les directions normales déplacées.

Soit S un tétraèdre générique donné. Nous introduisons maintenant des vecteurs qui dépendent de S, mais qui sont définis sur le tétraèdre de référence;

$$\nu_i := \ell^{-1}(m_i),$$

$$\mu_i := \phi_i^{-1}(\nu_i), \quad i = 1(1)4.$$

La normale m_i à la i-ème face de S est transportée sur la i-ème face de $\tilde{S}$ au moyen de ℓ^{-1}; nous obtenons un vecteur ν_i non parallèle à la i-ème face de $\tilde{S}$. Ce vecteur ν_i est transporté, au moyen de ϕ_i^{-1}, sur la face 1 de $\tilde{S}$; nous obtenons un vecteur μ_i non parallèle à la face 1 de $\tilde{S}$, c'est-à-dire

$$\mu_{ix} + \mu_{iy} + \mu_{iz} \neq 0.$$

5.2. Elément de pseudo-référence, élargi à 28 paramètres.

Nous allons construire un élément fini sur le tétraèdre de référence dont l'espace des fonctions dépend du tétraèdre générique considéré. Il ne possède donc pas un espace de référence au sens de 1.3. C'est pourquoi nous l'appellerons élément de pseudo-référence.

Nous observerons à postériori que la variante II se laisse exprimer à l'aide de 52 fonctions de référence (voir 5.4, théorème 2). Nous n'avons pas développé ce point de vue. La variante I-C nous fournit un élément de référence plus intéressant, puisqu'il ne comporte que 44 fonctions de référence.

Problème élément fini de pseudo-référence.

Soit S un tétraèdre générique donné, de directions normales déplacées $\nu_i = \ell^{-1}(m_i)$, $i = 1(1)4$. Nous cherchons un espace vectoriel de fonctions $\tilde{U} \subset C^1(\tilde{S})$ possédant les propriétés suivantes

(i) Les fonctions de $\tilde{U}$ sont de classe C^2 presque partout; leurs dérivées partielles d'ordre deux sont bornées.

(ii) $\tilde{U}$ contient tous les polynômes de degré ≤ 2.

(iii) Les 28 paramètres de $\tilde{Q}$ (voir 5.1) définissent un problème d'interpolation $\tilde{U}$-unisolvant.

(iv) Les restrictions de $u \in \tilde{U}$ aux faces du tétraèdre, considérées comme fonctions de deux variables, sont des fonctions rationnelles de type U^{II} (voir 3.6). La restriction de la dérivée directionnelle $\partial_{\nu_i} u$ à la face i, considérée comme fonction de deux variables, est un polynôme de degré ≤ 2, $i = 1(1)4$.

Construction de la base d'interpolation de l'élément de pseudo-référence.

Nous construisons une base $\{\tilde{u}_1,\ldots,\tilde{u}_{28}\}$ d'un espace $\tilde{\mathcal{V}}$ satisfaisant aux quatre conditions ci-dessus. Nous introduisons ces fonctions par blocs. Cette partition de la base induit une partition en blocs de la matrice d'interpolation. Nous choisissons la base d'interpolation de façon que la matrice d'interpolation associée soit triangulaire inférieure par blocs. Pour l'élément de pseudo-référence, les blocs diagonaux seront des matrices identité. Pour l'élément générique élargi 5.3, les blocs diagonaux seront des matrices carrées inversibles.

Bloc 1: fonctions d'interpolation numéros 1 à 16.

Nous choisissons les 16 polynômes de degré trois construit sous 4.3

$$\tilde{u}_{4i+j-3} := \tilde{p}_{ij}\ , \quad j = 0(1)3, \quad i = 1(1)4.$$

La condition (ii) est satisfaite. Les conditions (i) et (iv) sont respectées. Le premier bloc diagonal 16×16 de la matrice d'interpolation est l'identité

$$\left[\tilde{Q}\right] = \left(\begin{array}{c|c} I_{16} & ? \\ \hline * & ? \end{array}\right).$$

Bloc 2: fonctions d'interpolation numéros 17 à 28.

Nous cherchons une fonction $\tilde{w}_{11}(\lambda;x,y,z)$ définie pour $\lambda \in \mathbb{R}^3$, $\lambda_x + \lambda_y + \lambda_z \neq 0$, $(x,y,z) \in \tilde{S}$. Pour chaque paramètre $\lambda \in \mathbb{R}^3$ avec $\lambda_x + \lambda_y + \lambda_z \neq 0$, nous exigeons que $\tilde{w}_{11}(\lambda;\ldots)$ soit de classe $C^1(\tilde{S})$ et possède les propriétés suivantes.

(i) $\tilde{w}_{11}(\lambda;\ldots)$ est de classe C^2 presque partout; ses dérivées partielles d'ordre deux sont bornées.

(ii) Les restrictions de $\tilde{w}_{11}(\lambda;\ldots)$ aux faces 3 et 4 sont nulles. De même, le gradient de $\tilde{w}_{11}(\lambda;\ldots)$ sur les faces 3 et 4 est nul.

(iii) $\tilde{w}_{11}(\lambda;\ldots)$ s'annule indentiquement sur la face 2. Pour chaque $t \in \mathbb{R}^3$, la dérivée directionnelle $\partial_t \tilde{w}_{11}(\lambda;0,y,z)$ est un polynôme de degré $\leqslant 2$ en y,z.

(iv) Dans la face 1, on a

$$\tilde{w}_{11}(\lambda;x,y,z) = \frac{2x\,y^2\,z^2}{(x+y)\,(x+z)} .$$

La restriction de la dérivée directionnelle $\partial_\lambda \tilde{w}_{11}(\lambda;\ldots)$ à la face 1, considérée comme fonction de deux variables, est un polynôme de degré $\leqslant 2$. [Avec la notation $\partial_\lambda = \lambda_x \partial_x + \lambda_y \partial_y + \lambda_z \partial_z$.]

La fonction $\tilde{w}_{11}$ nous permet de construire les douze fonctions d'interpolation restantes

$$\tilde{w}_{12}(\lambda;x,y,z) := \tilde{w}_{11}(\lambda_y,\lambda_z,\lambda_x;\ y,z,x),$$

$$\tilde{w}_{13}(\lambda;x,y,z) := \tilde{w}_{11}(\lambda_z,\lambda_x,\lambda_y;\ z,x,y),$$

$$\tilde{w}_{ij}(\ \lambda;x,y,z) := \tilde{w}_{1j}(\lambda;\alpha_i^{-1}(x,y,z)),$$

$$\tilde{u}_{13+3i+j}(x,y,z) := \tilde{w}_{ij}(\nu_i;\ x,y,z),$$

$$j = 1,2,3, \quad i = 1(1)4.$$

où $\nu_i = \phi_i\ \mu_i$ est une direction normale déplacée (voir 5.1).

La matrice d'interpolation prend alors la forme

$$\left[\tilde{Q}\right] = \left(\begin{array}{c|c} I_{16} & 0 \\ \hline * & I_{12} \end{array}\right).$$

Remarque.

La fonction suivante, restreinte à une face du thétraèdre générique et considérée comme fonction de deux variables, est un polynôme de degré ≤ 2;

$$\partial_{m_i} \tilde{w}_{ij} (\nu_i ; L^{-1}(\ldots))$$
$$= \{\partial_{\nu_i} \tilde{w}_{ij} (\nu_i ; \ldots)\} \circ L^{-1}$$
$$= \{\partial_{\nu_i} \tilde{w}_{1j} (\mu_i ; \alpha_i^{-1}(\ldots))\} \circ L^{-1}$$
$$= \{\partial_{\mu_i} \tilde{w}_{1j} (\mu_i ; \ldots)\} \circ \alpha_i^{-1} \circ L^{-1}$$
$$= \begin{cases} \{\partial_{\mu_i} \tilde{w}_{11} (\mu_i ; \ldots)\} \circ \alpha_i^{-1} \circ L^{-1} & \text{si } j = 1, \\ \{\partial_{(\mu_{iy}, \mu_{iz}, \mu_{ix})} \tilde{w}_{11} (\mu_{iy}, \mu_{iz}, \mu_{ix} ; \ldots)\} \circ \alpha_i^{-1} \circ L^{-1} & \text{si } j = 2, \\ \{\partial_{(\mu_{iz}, \mu_{ix}, \mu_{iy})} \tilde{w}_{11} (\mu_{iz}, \mu_{ix}, \mu_{iy} ; \ldots)\} \circ \alpha_i^{-1} \circ L^{-1} & \text{si } j = 3; \end{cases}$$
$$i = 1(1)4.$$

Par contre, dans la face i et dans toute direction t linéairement indépendante de m_i, la dérivée

$$\partial_t \tilde{w}_{ij} (\nu_i ; L^{-1}(\ldots))\Big|_{\text{face } i}$$

est une fonction rationnelle à deux variables.

Construction de $\tilde{w}_{11}(\lambda ; \ldots)$.

Nous partons de la fonction

$$r_o(x,y,z) = \frac{2x\, y^2\, z^2}{(x+y)\,(x+z)}\ .$$

La fonction r_o satisfait (i), (ii), (iii)

$$\partial_t \, r_o(0,y,z) = t_x \, 2yz,$$

et la première partie de (iv). En vue de satisfaire la deuxième partie de (iv), calculons

$$\partial_\lambda \, r_o(x,y,z) = \lambda_x \frac{2y^2 z^2}{(x+y)(x+z)} + \frac{2xyz}{(x+y)(x+z)} \{$$

$$- \lambda_x \frac{yz(2x+y+z)}{(x+y)(x+z)} + \lambda_y \frac{z(2x+y)}{x+y} + \lambda_z \frac{y(2x+z)}{x+z}\} .$$

Dans la face 1, nous avons

$$\frac{2y^2 z^2}{(x+y)(x+z)} = 2yz - \frac{2xyz}{(1-y)(1-z)} .$$

Posons

$$c(\lambda;x,y,z) := \frac{2}{(1-y)(1-z)} \left[\lambda_x \{-1 - \frac{yz(1+x)}{(1-y)(1-z)} \} + \lambda_y \frac{z(2x+y)}{1-z} + \lambda_z \frac{y(2x+z)}{1-y} \right] .$$

Nous aurons

$$\partial_\lambda \, r_o(x,y,z) \Big|_{1-x-y-z = 0}$$

$$= \lambda_x \, 2yz + xyz \; c(\lambda;x,y,z) .$$

Nous corrigeons r_o en lui ajoutant une fonction $b(\lambda;\ldots)$ telle que la somme

$$\tilde{w}_{11}(\lambda;x,y,z) = r_o(x,y,z) + b(\lambda;x,y,z)$$

possède toutes les propriétés (i) à (iv).

Définissons

$$b(\lambda;x,y,z) = \frac{x^2 y^2 z^2}{(1-x-y)(1-x-z)(1-y-z)} \cdot \frac{1-x-y-z}{\lambda_x+\lambda_y+\lambda_z} \cdot c(\lambda;x,y,z) .$$

Nous avons

$$\partial_\lambda \; b(\lambda;x,y,z)\Big|_{\text{face } 1} = - \, xyzc(\lambda;x,y,z).$$

Par suite, la deuxième partie de la condition (iv) est satisfaite de la façon suivante

<u>Formule 5.2-1.</u>

$$\partial_\lambda \; \tilde{w}_{11}(\lambda;x,y,z)\Big|_{\text{face } 1} = \lambda_x \; 2yz.$$

La condition (iii) prend la forme

<u>Formule 5.2-2.</u>

$$\partial_t \; \tilde{w}_{11}(\lambda;x,y,z)\Big|_{\text{face } 2} = t_x \; 2yz.$$

Enfin, nous pouvons mettre $\tilde{w}_{11}$ sous la forme suivante.

<u>Formule 5.2-3.</u>

$$\tilde{w}_{11}(\lambda;x,y,z) = r_o(x,y,z) + \frac{\lambda_x r_1(x,y,z)+\lambda_y r_2(x,y,z)+\lambda_z r_3(x,y,z)}{\lambda_x + \lambda_y + \lambda_z}$$

où $r_o(x,y,z) := \dfrac{2xy^2z^2}{(x+y)(x+z)}$,

$$r\;(x,y,z) := \frac{2x^2y^2z^2(1-x-y-z)}{(1-x-y)(1-x-z)(1-y-z)(1-y)(1-z)} \;,$$

$$r_1(x,y,z) := r(x,y,z) \; \{-1 - \frac{yz(1+x)}{(1-y)(1-z)}\},$$

$$r_2(x,y,z) := r(x,y,z) \; \frac{z(2x+y)}{1-z} \;,$$

$$r_3(x,y,z) := r(x,y,z) \; \frac{y(2x+z)}{1-y} \;.$$

<u>Remarque.</u>

$\tilde{w}_{11}(\lambda;x,y,z)$ est homogène en λ.

5.3. Elément fini générique, élargi à 28 paramètres.

Pour le problème d'interpolation

$$Q:\ C^1(S) \longrightarrow \mathbb{R}^{28} \quad \text{(voir 5.1)},$$

nous choisissons la base d'interpolation

$$u_i := \tilde{u}_i \circ L^{-1}, \quad i = 1(1)28,$$

où les $\tilde{u}_i$ sont les fonctions d'interpolation de l'élément de pseudo-référence. Notons U l'espace vectoriel engendré par ces 28 fonctions.

Théorème.

Le problème d'interpolation élargi $Q:\ U \longrightarrow \mathbb{R}^{28}$ est U-unisolvant.

Démonstration.

Par rapport à la base d'interpolation $\{u_i,\ i = 1(1)28\}$, la matrice d'interpolation de Q a la forme suivante

$$[Q] = \left[\begin{array}{cccccccc:c}
1 & & & & & & & & \\
 & D_1^{-1} & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & \\
 & & & D_2^{-1} & & & & & 0 \\
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & & & D_3^{-1} & & & \\
 & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & D_4^{-1} & \\
\hdashline
 & & & & Q_1 & & & & D_5^{-1}
\end{array}\right]$$

où D_1 , D_2 , D_3 , D_4 sont des matrices 3×3,

D_5 est une matrice diagonale 12×12,

et Q_1 est une matrice 12×16.

Détermination de D_i , $i = 1(1)4$.

Soient (i,j,k,ℓ) une permutation cyclique de $(1,2,3,4)$;

$\tilde{u} = u \circ L$, $u \in U$; alors

$$\tilde{Q}_{4i-2}(\tilde{u}) = \tilde{F}_{i1}(\tilde{u}) = \partial_{\tilde{e}_{i1}} (u \circ L)\ (\tilde{A}_i)$$

$$= \partial_{\ell(\tilde{e}_{i1})} u\ (A_i)$$

$$= (x_j - x_i)\ F_{i1}(u) + (y_j - y_i)\ F_{i2}(u)$$

$$+ (z_j - z_i)\ F_{i3}(u)$$

$$= (x_j - x_i)\ Q_{4i-2}(u) + (y_j - y_i)\ Q_{4i-1}(u)$$

$$+ (z_j - z_i)\ Q_{4i}(u).$$

De même,

$$\tilde{Q}_{4i-1}(u) = (x_k - x_i)\ Q_{4i-2}(u) + (y_k - y_i)\ Q_{4i-1}(u)$$

$$+ (z_k - z_i)\ Q_{4i}(u),$$

$$\tilde{Q}_{4i}(u) = (x_\ell - x_i)\ Q_{4i-2}(u) + (y_\ell - y_i)\ Q_{4i-1}(u)$$

$$+ (z_\ell - z_i)\ Q_{4i}(u).$$

Par construction des fonctions d'interpolation de pseudo-référence, nous avons

$$I_3 = \begin{bmatrix} \tilde{Q}_{4i-2}(\tilde{u}_{4i-2}) & \cdots & \tilde{Q}_{4i-2}(\tilde{u}_{4i}) \\ \cdots & & \cdots \\ \tilde{Q}_{4i}\ (\tilde{u}_{4i-2}) & \cdots & \tilde{Q}_{4i}\ (\tilde{u}_{4i}) \end{bmatrix}$$

$$= D_i \begin{bmatrix} Q_{4i-2}(u_{4i-2}) & \cdots & Q_{4i-2}(u_{4i}) \\ \cdots & & \cdots \\ Q_{4i}\ (u_{4i-2}) & \cdots & Q_{4i}\ (u_{4i}) \end{bmatrix},$$

où $D_i := \begin{bmatrix} x_j-x_i & y_j-y_i & z_j-z_i \\ x_k-x_i & y_k-y_i & z_k-z_i \\ x_\ell-x_i & y_\ell-y_i & z_\ell-z_i \end{bmatrix}$, $i = 1(1)4$.

<u>Détermination de D_5.</u>

Par construction des fonctions u_i , $i = 17(1)28$, D_5 est diagonale. En utilisant les propriétés des fonctions de pseudo-référence, pour $j = 1,2,3$ et $i = 1(1)4$, nous aurons

$$1 = \tilde{G}_{ij}(\tilde{u}_{3i+j+14}) = \partial_{\tilde{n}_{ij}} (u_{3i+j+14} \circ L)\ (\tilde{B}_{ij})$$

$$= \partial_{\ell(\tilde{n}_{ij})} u_{3i+j+14}\ (B_{ij})$$

$$\overset{(*)}{=} < \ell(\tilde{n}_{ij}),\ n_{ij} > G_{ij}(u_{3i+j+14})$$

$$= < \ell(\tilde{n}_{ij}),\ n_{ij} > Q_{3i+j+14}(u_{3i+j+14})\ ;$$

l'égalité (*) se montre en écrivant le vecteur $\ell(\tilde{n}_{ij})$, parallèle à la i-ème face, dans une base orthonormée (t_{ij},n_{ij}); comme $u_{3i+j+14}$ s'annule le long des trois côtés de la face i, nous aurons

$$\partial_{t_{ij}} u_{3i+j+14}\ (B_{ij}) = 0\ .$$

Finalement

$$\text{diag } D_5 = (< \ell(\tilde{n}_{11}),n_{11} >,\ < \ell(\tilde{n}_{12}),n_{12} >,\ \ldots,$$
$$< \ell(\tilde{n}_{42}),n_{42} >,\ < \ell(\tilde{n}_{43}),n_{43} >)\ .$$



5.4. Elément tétraédrique, de classe C^1, de degré deux, à 16 paramètres.

Nous sommes maintenant en mesure de donner une solution (variante II) du problème élément fini énoncé sous 1.2. Dans l'élément générique élargi à 28 paramètres, nous allons remplacer les 12 paramètres auxiliaires par 12 contraintes linéaires.

Afin de satisfaire la condition de raccordement 1.2-(iv), nous exigeons que

5.4-1. "La restriction de la dérivée normale $\partial_{m_i} v$ à la face i, considérée comme une fonction de deux variables, est un polynôme de degré $\leqslant 1$, $i = 1(1)4$."

En tenant compte du fait que, pour $u \in U$, la restriction de $\partial_{m_i} u$ à la face i est un polynôme de degré $\leqslant 2$ à deux variables, la condition 5.4-1 s'écrit de façon équivalente sous forme de contraintes linéaires

5.4-2.
$$G_{i1}(u) = \frac{1}{2}\{\partial_{n_{i1}} u(A_k) + \partial_{n_{i1}} u(A_\ell)\},$$
$$G_{i2}(u) = \frac{1}{2}\{\partial_{n_{i2}} u(A_\ell) + \partial_{n_{i2}} u(A_j)\},$$
$$G_{i3}(u) = \frac{1}{2}\{\partial_{n_{i3}} u(A_j) + \partial_{n_{i3}} u(A_k)\},$$

où (i,j,k,ℓ) est une permutation cyclique des nombres $(1,2,3,4)$, $i = 1(1)4$.

Théorème 1.

L'espace linéaire

$$V^{II} := \{u \in U;\ u \text{ respecte les 12 contraintes 5.4-2}\}$$

est une solution du problème élément fini 1.2.

<u>Démonstration.</u>

Les contraintes linéaires sont respectées par les polynômes de degré $\leqslant 2$; ainsi, V^{II} contient les polynômes de degré $\leqslant 2$.

D'après 2.8, le problème d'interpolation 1.2-(iii) est V^{II}-unisolvant.

La propriété 1.2-(v) provient de ce que notre construction ne privilégie aucun sommet. Une vérification numérique sera effectuée dans 7.4-6.

Il reste encore à vérifier les conditions de raccordement. Considérons deux tétraèdres S_1, S_2 ayant une face commune T de sommets A_1, A_2, A_3. Pour 20 nombres réels donnés, considérons les fonctions d'interpolation correspondantes, v_1 sur S_1 et v_2 sur S_2 .

<u>Classe C^o.</u>

Les restrictions $v_1|_T$ et $v_2|_T$, considérées comme des fonctions de deux variables, appartiennent à l'espace V^{II} défini sous 3.7 pour le triangle T. Les 9 paramètres de l'élément bidimensionnel 3.3 ont les mêmes valeurs pour $v_1|_T$ et $v_2|_T$.
Par suite, $v_1|_T = v_2|_T$.

<u>Classe C^1.</u>

Soit m un vecteur normal à la face T. Les dérivées normales $\partial_m v_1|_T$ et $\partial_m v_2|_T$, considérées comme fonctions de deux variables, sont des polynômes de degré $\leqslant 1$. Ces deux fonctions affines coïncident aux trois sommets A_1, A_2, A_3 . Par suite, $\partial_m v_1|_T = \partial_m v_2|_T$.



Remarque.

La solution du problème d'interpolation 1.2-(iii) et le calcul de la base d'Hermite seront explicités au paragraphe 7.

Théorème 2.

La variante II se laisse exprimer à l'aide de 52 fonctions de référence.

Démonstration.

D'après les définitions de 1.3, nous devons montrer que tout $v \in V^{II}(S)$ peut se mettre sous la forme d'une combinaison linéaire

$$v = \sum_{j=1}^{52} a_j \hat{u}_j \circ L^{-1}$$

où les fonctions $\hat{u}_1, \ldots, \hat{u}_{52} \in C^1(\tilde{S})$ ne dépendent pas de S.

Partant de la forme

$$v = \sum_{i=1}^{28} s_i \tilde{u}_i \circ L^{-1},$$

nous pouvons poser $\hat{u}_j := \tilde{u}_j$ pour $j = 1(1)16$.

En posant $\hat{\mu}_1 := \dfrac{\mu_1}{\mu_{1x}+\mu_{1y}+\mu_{1z}}$ dans 5.2,

$\tilde{u}_{17}$ peut se mettre sous la forme

$$\tilde{u}_{17} = r_o + \hat{\mu}_{1x} r_1 + \hat{\mu}_{1y} r_2 + \hat{\mu}_{1z} r_3$$

où les fonctions r_o, r_1, r_2, r_3 ne dépendent pas de S et les coefficients satisfont

$$\hat{\mu}_{1x} + \hat{\mu}_{1y} + \hat{\mu}_{1z} = 1.$$

On peut alors écrire

$$\tilde{u}_{17} = (r_o + r_1) + \hat{\mu}_{1y}(r_2 - r_1) + \hat{\mu}_{1z}(r_3 - r_1)$$

et poser $\hat{u}_{17} := r_o + r_1$, $\hat{u}_{18} := r_2 - r_1$, $\hat{u}_{19} := r_3 - r_1$.

En continuant de façon analogue pour $\tilde{u}_{18}, \ldots, \tilde{u}_{28}$, nous parvenons au résultat. 

§ 6 VARIANTE I-C, CONSTRUCTION.

Nous poursuivons la construction annoncée dans le paragraphe 1 et commencée au paragraphe 4.

6.1. Notations.

En vue d'introduire des fonctions auxiliaires permettant de corriger les dérivées normales des polynômes 4.3 sur les faces du tétraèdre générique, nous introduisons des paramètres auxiliaires.

Les paramètres de référence.

Dans chaque face, introduisons trois points

$$\tilde{C}_{11} := (\frac{2}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{6}), \quad \tilde{C}_{12} := (\frac{1}{6},\frac{2}{3},\frac{1}{6}), \quad \tilde{C}_{13} := (\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{2}{3}),$$

$$\tilde{C}_{ij} := \alpha_i(\tilde{C}_{1j}), \quad j = 1,2,3, \quad i = 1(1)4.$$

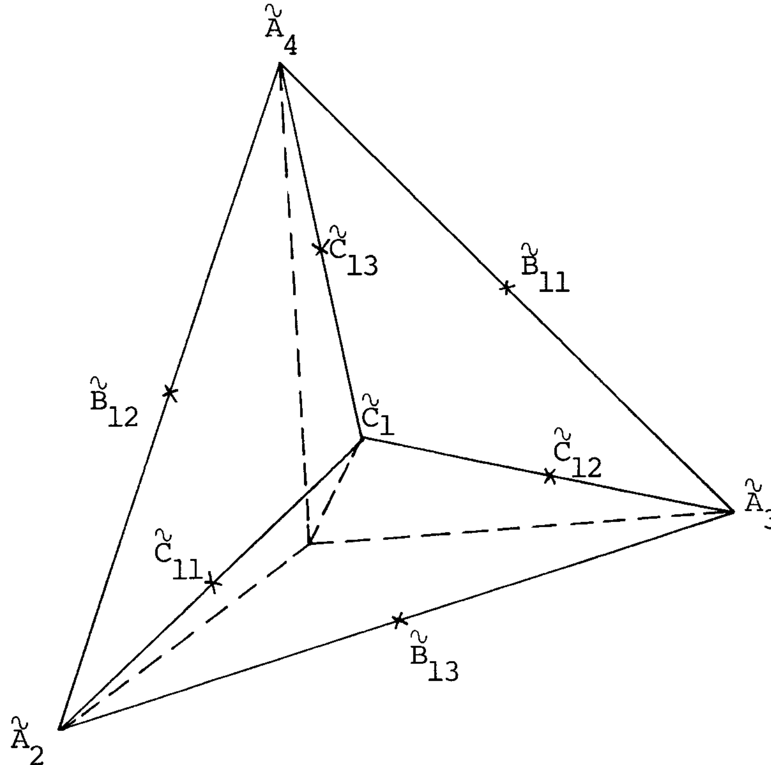


Fig. 6.1. Tétraèdre de référence.

Aux 16 paramètres introduits sous 4.1, nous ajoutons les 28 paramètres auxiliaires suivants

$$\tilde{G}_{ij}(w) := \partial_{\tilde{n}_{ij}} w\ (\tilde{B}_{ij}),\ j = 1,2,3, \quad i = 1(1)4,$$

$$\tilde{H}_{i}\ (w) := \partial_{\tilde{m}_{i}} w\ (\tilde{C}_{i})\ ,\ i = 1(1)4,$$

$$\tilde{H}_{ij}(w) := \partial_{\tilde{m}_{i}} w\ (\tilde{C}_{ij}),\ j = 1,2,3, \quad i = 1(1)4.$$

Ces 44 paramètres sont ordonnés comme suit

$$\tilde{Q} := \begin{pmatrix} \tilde{F}_{10} \\ \tilde{F}_{11} \\ \cdots \\ \tilde{F}_{42} \\ \tilde{F}_{43} \\ \tilde{G}_{11} \\ \tilde{G}_{12} \\ \cdots \\ \tilde{G}_{43} \\ \tilde{H}_{1} \\ \tilde{H}_{2} \\ \tilde{H}_{3} \\ \tilde{H}_{4} \\ \tilde{H}_{11} \\ \tilde{H}_{12} \\ \cdots \\ \tilde{H}_{42} \\ \tilde{H}_{43} \end{pmatrix} ,\ \tilde{Q}\colon C^1(\tilde{S}) \longrightarrow \mathbb{R}^{44}.$$

Comme dans le lemme de 4.1, on montre que

$$\tilde{G}_{ij} = \tilde{G}_{1j} \circ E_i\ , \quad j = 1,2,3,$$

$$\tilde{H}_{i} = \tilde{H}_{1} \circ E_i\ ,$$

$$\tilde{H}_{ij} = \tilde{H}_{1j} \circ E_i\ , \quad j = 1,2,3, \quad i = 1(1)4.$$

Les paramètres génériques.

Définissons $C_{ij} := L(\tilde{C}_{ij})$, $j = 1,2,3$, $i = 1(1)4$. Aux 16 paramètres génériques de 4.1, nous ajoutons les 28 paramètres auxiliaires suivants

$$G_{ij}(w) := \partial_{n_{ij}} w\,(B_{ij}),\ j = 1,2,3,\quad i = 1(1)4,$$

$$H_i\,(w) := \partial_{m_i} w\,(C_i),\quad i = 1(1)4,$$

$$H_{ij}(w) := \partial_{m_i} w\,(C_{ij}),\ j = 1,2,3,\quad i = 1(1)4.$$

Ces 44 paramètres sont ordonnés de la façon suivante

$$Q := \begin{pmatrix} F_{10} \\ F_{11} \\ \cdots \\ F_{42} \\ F_{43} \\ G_{11} \\ G_{12} \\ \cdots \\ G_{43} \\ H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ H_4 \\ H_{11} \\ H_{12} \\ \cdots \\ H_{42} \\ H_{43} \end{pmatrix} ,\quad Q:\ C^1(S) \longrightarrow \mathbb{R}^{44}.$$

6.2. Elément tétraédrique de référence, élargi à 44 paramètres.

Problème élément fini de référence.

Nous cherchons un espace vectoriel de fonctions $\tilde{U} \subset C^1(\tilde{S})$ possédant les propriétés suivantes

(i) Les fonctions de $\tilde{U}$ sont de classe C^2 presque partout; leurs dérivées partielles d'ordre deux sont bornées.

(ii) $\tilde{U}$ contient tous les polynômes de degré $\leqslant 2$.

(iii) Les 44 paramètres de $\tilde{Q}$ (voir 6.1) définissent un problème d'interpolation $\tilde{U}$-unisolvant.

(iv) Les restrictions de $u \in \tilde{U}$ aux faces du tétraèdre, considérées comme fonctions de deux variables, sont des polynômes de degré $\leqslant 3$ par morceaux, de type U^I (voir 3.6). La restriction de la dérivée directionnelle $\partial_{\tilde{m}_i} u$ à la face i, considérée comme une fonction de deux variables, est un polynôme par morceaux de degré $\leqslant 2$. (Les morceaux sont ceux de la figure 3.5, à une transformation affine près.)

(v) Soient $P_1,\ldots,P_{24}$ les applications affines de $\tilde{S}$ dans $\tilde{S}$ qui effectuent une permutation des sommets $\tilde{A}_1,\tilde{A}_2,\tilde{A}_3,\tilde{A}_4$. Alors, $\tilde{u} \circ P_i \in \tilde{U} \quad \forall \tilde{u} \in \tilde{U}$, $i = 1(1)24$.

Construction de la base d'interpolation de l'élément de référence.

Nous construisons une base $\{\tilde{u}_1,\ldots,\tilde{u}_{44}\}$ d'un espace $\tilde{U}$ satisfaisant aux cinq conditions ci-dessus. Nous introduisons ces fonctions par blocs. Cette partition de la base induit une partition en blocs de la matrice d'interpolation. Nous choisissons la base d'interpolation de façon que la matrice d'interpolation associée soit triangulaire inférieure par blocs. Pour l'élément de réfé-

rence, les blocs diagonaux seront des matrices identité. Pour l'élément générique élargi 6.3, les blocs diagonaux seront des matrices carrées inversibles.

6.2-1. <u>Bloc 1: fonctions de référence numéros 1 à 16.</u>

Nous choisissons les seize polynômes de degré trois construits sous 4.3

$$\tilde{u}_{4i+j-3} := \tilde{p}_{ij} \ , \quad i = 1(1)4, \quad j = 0(1)3,$$

La condition (ii) est ainsi satisfaite. Le premier bloc diagonal 16×16 de la matrice d'interpolation est l'identité

$$[\tilde{Q}] = \left[\begin{array}{c|c} I_{16} & ? \\ \hline * & ? \end{array}\right] .$$

6.2-2. <u>Bloc 2: fonctions de référence numéros 17 à 28.</u>

Nous cherchons une fonction $\tilde{w}_{11} \in C^1(\tilde{S})$ possédant les propriétés suivantes.

(i) $\tilde{w}_{11}$ est un polynôme par morceaux de degré $\leqslant 3$; les morceaux sont ceux de la figure 6.2-2.

(ii) La restriction de $\tilde{w}_{11}$ à la face 1 correspond à la fonction $\tilde{w}_1^I$ du problème bidimensionnel

$$\tilde{w}_{11}(1-x-y,x,y) = \tilde{w}_1^I(x,y) \quad \text{(voir 3.5)} .$$

Les restrictions de $\tilde{w}_{11}$ aux faces 2, 3 et 4 du tétraèdre sont nulles.

(iii) Dans les faces 3 et 4, le gradient de $\tilde{w}_{11}$ est nul.

Une telle fonction permet de construire douze fonctions d'interpolation

$$\tilde{w}_{12}(x,y,z) := \tilde{w}_{11}(y,z,x),$$

$$\tilde{w}_{13}(x,y,z) := \tilde{w}_{11}(z,x,y),$$

$$\tilde{u}_{13+3i+j} := \tilde{w}_{ij} := \tilde{w}_{1j} \circ \alpha_i^{-1},$$

$$j = 1,2,3, \quad i = 1(1)4.$$

La matrice d'interpolation prend alors la forme

$$\left[\tilde{Q}\right] = \left[\begin{array}{c|c|c} I_{16} & 0 & ? \\ \hline * & I_{12} & ? \\ \hline * & * & ? \end{array}\right].$$

Le polynôme par morceaux suivant possède les propriétés requises

$$\tilde{w}_{11}(x,y,z) := \begin{cases} x\,(\frac{2}{3}\,x^2 - xy - xz + 2yz) & \text{dans } \tilde{S}_1 , \\ y^2(z - \frac{1}{3}\,y) & \text{dans } \tilde{S}_2 , \\ z^2(y - \frac{1}{3}\,z) & \text{dans } \tilde{S}_3 . \end{cases}$$

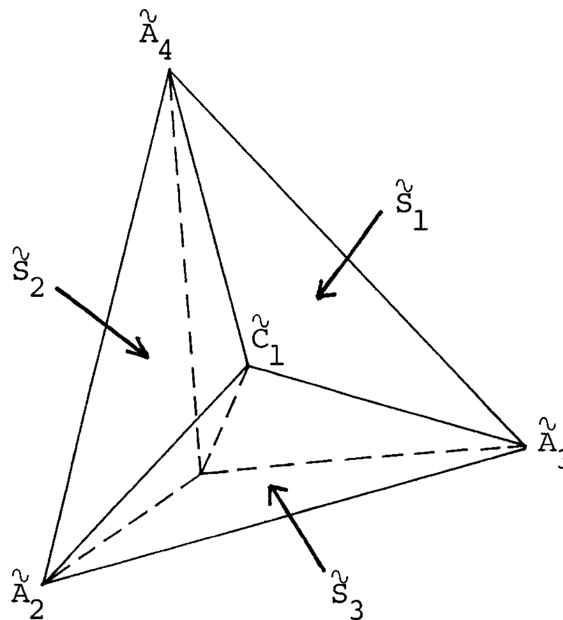


Fig. 6.2-2. Morceau $\tilde{S}_1$ de sommets $\tilde{A}_1\ \tilde{C}_1\ \tilde{A}_3\ \tilde{A}_4$,
morceau $\tilde{S}_2$ de sommets $\tilde{A}_1\ \tilde{C}_1\ \tilde{A}_4\ \tilde{A}_2$,
morceau $\tilde{S}_3$ de sommets $\tilde{A}_1\ \tilde{C}_1\ \tilde{A}_2\ \tilde{A}_3$.

6.2-3. Bloc 3: fonctions de référence numéros 29 à 32.

Nous cherchons une fonction $\tilde{r}_{10} \in C^1(\tilde{S})$ possédant les propriétés suivantes

(i) $\tilde{r}_{10}$ est de classe C^2 presque partout; ses dérivées partielles d'ordre deux sont bornées.

(ii) Les restrictions de $\tilde{r}_{10}$ aux quatre faces de $\tilde{S}$ sont nulles.

(iii) La restriction de la dérivée normale de $\tilde{r}_{10}$ à la face i, considérée comme fonction de deux variables, est un polynôme de degré $\leqslant 2$ par morceaux satisfaisant $\tilde{H}_i(\tilde{r}_{10}) = \delta_{i1}$, $i = 1(1)4$.

Une telle fonction nous permet de construire quatre fonctions d'interpolation

$$\tilde{u}_{28+i} := \tilde{r}_{io} := \tilde{r}_{10} \circ \alpha_i^{-1}, \quad i = 1(1)4.$$

Avec ce choix, la matrice d'interpolation prend la forme

$$[\tilde{\gamma}] = \begin{pmatrix} I_{16} & 0 & 0 & ? \\ * & I_{12} & 0 & ? \\ * & * & I_4 & ? \\ * & * & * & ? \end{pmatrix}.$$

Remarque.

Nous avons d'abord cherché les fonctions de référence parmi les polynômes de degré $\leqslant 3$ par morceaux. Nous avons considéré les douze morceaux suivants

$$\tilde{C}\,\tilde{C}_i\,\tilde{A}_k\,\tilde{A}_\ell\,, \quad \tilde{C}\,\tilde{C}_i\,\tilde{A}_\ell\,\tilde{A}_j\,, \quad \tilde{C}\,\tilde{C}_i\,\tilde{A}_j\,\tilde{A}_k\,,$$

où $\tilde{C} := (\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4})$ et (i,j,k,ℓ) est une permutation cyclique des nombres $(1,2,3,4)$.

Nous avons constaté qu'il n'est pas possible de résoudre le problème élément fini 6.2 uniquement avec de tels polynômes par morceaux. Ce résultat négatif fera l'objet de 6.2-5. Nous démontrerons aussi que $\tilde{r}_{10}$ ne peut pas être un polynôme de degré $\leqslant 3$ par morceaux.

Construction de $\tilde{r}_{10}$.

Nous prescrivons que les restrictions de $\tilde{r}_{10}$ à $\tilde{S}_1$, $\tilde{S}_2$ et $\tilde{S}_3$ (voir fig. 6.2-2) soient des fonctions rationnelles possédant les symétries suivantes:

$$\tilde{r}_{10|\tilde{S}_2}(x,y,z) = \tilde{r}_{10|\tilde{S}_1}(y,x,z),$$

$$\tilde{r}_{10|\tilde{S}_3}(x,y,z) = \tilde{r}_{10|\tilde{S}_1}(z,y,x).$$

Pour obtenir la classe $C^1(\tilde{S})$, nous exigeons que

$$\tilde{r}_{10|\tilde{S}_1}(x,y,z) = \tilde{r}_{10|\tilde{S}_1}(x,z,y)$$

$$(\partial_y-\partial_x)(\tilde{r}_{10|\tilde{S}_1})\Big|_{y-x=0} = 0.$$

Il suffit de construire $\tilde{r}_{10|\tilde{S}_1}$.

Pour le morceau $\tilde{S}_1$, nous partons de la fonction

$$a(x,y,z) := 3x^2(1-x-y-z).$$

Première correction.

A la fonction a , nous ajoutons

$$b(x,y,z) := 2\frac{x^2(1-x-y-z)^2(y+z-2x)}{(1-3x)(y+z-x)}$$

de telle façon que

$$(\partial_y+\partial_z-2\partial_x)(a+b)\Big|_{y+z-2x=0} = 0.$$

Deuxième correction.

A la fonction (a+b), nous ajoutons c_1 de telle façon que

$$(\partial_y-\partial_x)(a+b+c_1)\Big|_{y-x=0} = 0.$$

Dans le calcul de $(\partial_y-\partial_x)(a+b)$, mettons en évidence le facteur $(y+z-2x)$; nous obtenons

$$(\partial_y-\partial_x)(a+b)(x,y,z) = x(1-x-y-z)(y+z-2x)\ \gamma(x,y,z),$$

où $$\gamma(x,y,z) := \frac{2}{(1-3x)(y+z-x)}\left[(8x+2y+2z-5) - x(1-x-y-z)\left\{\frac{3}{1-3x}+\frac{2}{y+z-x}\right\}\right].$$

Nous posons

$$c_1(x,y,z) := -\frac{x^2(z-x)^2(1-x-y-z)^2}{y(1-2x-z)(y+z-2x)}\ \frac{y-x}{2}\ \gamma(x,y,z).$$

Troisième correction.

A la fonction $(a+b+c_1)$, nous ajoutons c_2 de telle façon que

$$(\partial_z-\partial_x)(a+b+c_1+c_2)\Big|_{z-x=0} = 0$$

et que la fonction de référence

$$\tilde{r}_{10|\tilde{S}_1} := a + b + c_1 + c_2$$

soit symétrique en y et z.

Nous tirons des calculs de la deuxième correction que

$$\gamma(x,y,z) = \gamma(x,z,y)$$

et $$(\partial_z-\partial_x)(a+b+c_1)\Big|_{z-x=0} = x(1-x-y-z)(y+z-2x)\ \gamma(x,y,z)\Big|_{z-x=0}.$$

Nous posons

$$c_2(x,y,z) := -\frac{x^2(y-x)^2(1-x-y-z)^2}{z(1-2x-y)(y+z-2x)}\ \frac{z-x}{2}\ \gamma(x,y,z).$$

6.2-4. Bloc 4: fonctions de référence numéros 33 à 44.

Nous cherchons une fonction $\tilde{r}_{13} \in C^1(\tilde{S})$ possédant les propriétés suivantes

(i) $\tilde{r}_{13}$ est de classe C^2 presque partout; ses dérivées partielles d'ordre deux sont bornées.

(ii) Les restrictions de $\tilde{r}_{13}$ aux quatre faces de $\tilde{S}$ sont nulles.

(iii) La restriction de la dérivée normale de $\tilde{r}_{13}$ à la face 1 est un polynôme de degré $\leqslant$ 2 par morceaux, satisfaisant $\tilde{H}_{1j}(\tilde{r}_{13}) = \delta_{j3}$, $j = 1,2,3$, $\tilde{H}_1(\tilde{r}_{13}) = 0$; les restrictions des gradients de $\tilde{r}_{13}$ aux faces 2, 3 et 4 sont nuls.

Une telle fonction nous permet de construire les douze fonctions d'interpolation restantes

$$\tilde{r}_{11}(x,y,z) := \tilde{r}_{13}(y,z,x),$$

$$\tilde{r}_{12}(x,y,z) := \tilde{r}_{13}(z,x,y),$$

$$\tilde{u}_{29+3i+j} := \tilde{r}_{ij} := \tilde{r}_{1j} \circ \alpha_i^{-1},$$

$$j = 1,2,3, \quad i = 1(1)4.$$

Avec ce choix, la matrice d'interpolation prend la forme finale

$$\left[\tilde{Q}\right] = \left(\begin{array}{c|c|c|c} I_{16} & 0 & 0 & 0 \\ \hline * & I_{12} & 0 & 0 \\ \hline * & * & I_4 & 0 \\ \hline * & * & * & I_{12} \end{array}\right).$$

Construction de $\tilde{r}_{13}$.

Nous cherchons une fonction rationnelle par morceaux possédant les symétries suivantes

$$\tilde{r}_{13|\tilde{S}_2}(x,y,z) = \tilde{r}_{13|\tilde{S}_1}(y,x,z),$$

$$\tilde{r}_{13|\tilde{S}_3} = 0.$$

Pour obtenir la classe $C^1(\tilde{S})$, nous exigeons que

$$(\partial_y-\partial_x)(\tilde{r}_{13|\tilde{S}_1})\Big|_{y-x=0} = 0 ,$$

$$(\tilde{r}_{13|\tilde{S}_1})\Big|_{z-x=0} = 0 ,$$

$$(\partial_z-\partial_x)(\tilde{r}_{13|\tilde{S}_1})\Big|_{z-x=0} = 0.$$

Il suffit de construire $\tilde{r}_{13|\tilde{S}_1}$.

Pour le morceau $\tilde{S}_1$, nous partons de la fonction

$$a(x,y,z) := \frac{4x^2(z-x)^2(1-x-y-z)}{(1-y-z)(1-2x-y)}$$

qui vérifie

$$\partial_{\tilde{m}_1}\ a(x,y,z)\Big|_{1-x-y-z=0} = 12x(z-x).$$

A la fonction a , nous ajoutons b de telle façon que

$$(\partial_y-\partial_x)(a+b)\Big|_{y-x=0} = 0,$$

$$(\tilde{r}_{13|\tilde{S}_1}) := a + b.$$

Nous calculons

$$(\partial_y-\partial_x)\ a(x,y,z)\Big|_{y-x=0}$$

$$= 4x(z-x)(1-x-y-z)\ \beta(x,y,z),\ \text{où}$$

$$\beta(x,y,z) := \frac{1}{(1-x-z)(1-3x)}\ \{\ 4x-2z+x(z-x)\ (\frac{1}{1-x-z} - \frac{1}{1-3x})\}\ .$$

Nous posons

$$b(x,y,z) := -\ \frac{2x^2(z-x)^2(1-x-y-z)^2(y-x)}{y(y+z-2x)(1-2x-z)}\ \ \beta(x,y,z).$$

6.2-5. Sur les polynômes par morceaux.

Soit $\tilde{\Pi}$ l'espace des fonctions $f \in C^o(\tilde{S})$ dont les restrictions aux douze morceaux suivants sont des polynômes de degré $\leqslant 3$:

$$\tilde{C}\,\tilde{C}_i\,\tilde{A}_k\,\tilde{A}_\ell\ ,\quad \tilde{C}\,\tilde{C}_i\,\tilde{A}_\ell\,\tilde{A}_j\ ,\quad \tilde{C}\,\tilde{C}_i\,\tilde{A}_j\,\tilde{A}_k\ ,$$

où $\tilde{C} := (\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4})$ et (i,j,k,ℓ) est une permutation des nombres $(1,2,3,4)$.

Nous allons montrer que chaque solution $\tilde{U}$ du problème élément fini 6.2 n'est pas incluse dans $\tilde{\Pi}$ et que les fonctions de référence $\tilde{r}_{10}$ et $\tilde{r}_{13}$ ne peuvent pas être choisies dans $\tilde{\Pi}$.

Lemme.

Soit $f: \tilde{S} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction satisfaisant

a) f est de la forme

$$f(x,y,z) = (1-x-y-z)\ g(x,y,z);$$

b) f est de classe $C^1(\tilde{S})$;

c) les restrictions

$$g_j := g_{|\tilde{S}_j}\ ,\quad j = 1,2,3 \qquad \text{(voir fig. 6.2-2)}$$

sont des polynômes de degré $\leqslant 2$.

Alors, f et g sont des polynômes globalement sur $\tilde{S}$.

Démonstration.

Nous démontrons que g est un polynôme. Ecrivons

$$g_j(x,y,z) = g_{j1}\,x^2 + g_{j2}\,y^2 + g_{j3}\,z^2 + g_{j4}\,yz + g_{j5}\,zx + g_{j6}\,xy + g_{j7}\,x + g_{j8}\,y + g_{j9}\,z + g_{j10}\ ,\quad j = 1,2,3.$$

La condition $g_1(x,x,z) = g_2(x,x,z)$ implique

$$g_{11} + g_{12} + g_{16} = g_{21} + g_{22} + g_{26}$$
$$g_{13} = g_{23}$$
$$g_{14} + g_{15} = g_{24} + g_{25}$$
$$g_{17} + g_{18} = g_{27} + g_{28}$$
$$g_{19} = g_{29}$$
$$g_{1\ 10} = g_{2\ 10}\ .$$

Désignons par $\partial_1, \partial_2, \partial_3$ les dérivées partielles par rapport à la première, deuxième et troisième variable respectivement. La condition

$$(\partial_2 - \partial_1)\ g_1(x,x,z) = (\partial_2 - \partial_1)\ g_2(x,x,z)$$

implique
$$-g_{11} + g_{12} = -g_{21} + g_{22}$$
$$g_{14} - g_{15} = g_{24} - g_{25}$$
$$g_{18} - g_{17} = g_{28} - g_{27}\ .$$

De façon analogue, on écrit les conditions

$$g_2(x,y,y) = g_3(x,y,y),$$
$$(\partial_3 - \partial_2)g_2(x,y,y) = (\partial_3 - \partial_2)g_3(x,y,y),$$
$$g_3(x,y,x) = g_1(x,y,x),$$
$$(\partial_1 - \partial_3)g_3(x,y,x) = (\partial_1 - \partial_3)g_1(x,y,x).$$

Les équations précédentes impliquent

$$g_{1k} = g_{2k} = g_{3k}\ ,\quad k = 1(1)10.$$



Proposition.

Soit $f: \tilde{S} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction satisfaisant

a) f est de classe $C^1(\tilde{S})$;

b) $f \in \tilde{\Pi}$;

c) f s'annule sur le bord de $\tilde{S}$.

Alors, le gradient de f est nul sur le bord de $\tilde{S}$.

Démonstration.

Par les hypothèses b et c, f est de la forme

$$f(x,y,z) = \begin{cases} (1-x-y-z)\, h_1(x,y,z) & \text{sur } \tilde{C}\,\tilde{A}_2\,\tilde{A}_3\,\tilde{A}_4\,, \\ x\, h_2(x,y,z) & \text{sur } \tilde{C}\,\tilde{A}_3\,\tilde{A}_4\,\tilde{A}_1\,, \\ y\, h_3(x,y,z) & \text{sur } \tilde{C}\,\tilde{A}_4\,\tilde{A}_1\,\tilde{A}_2\,, \\ z\, h_4(x,y,z) & \text{sur } \tilde{C}\,\tilde{A}_1\,\tilde{A}_2\,\tilde{A}_3\,, \end{cases}$$

où chaque h_i est un polynôme de degré $\leqslant$ 2 sur chacun des trois morceaux

$$\tilde{C}\,\tilde{C}_i\,\tilde{A}_k\,\tilde{A}_\ell\,, \quad \tilde{C}\,\tilde{C}_i\,\tilde{A}_\ell\,\tilde{A}_j\,, \quad \tilde{C}\,\tilde{C}_i\,\tilde{A}_j\,\tilde{A}_k\,,$$

(i,j,k,ℓ) désignant une permutation cyclique des nombres (1,2,3,4).

Au moyen d'une transformation affine, nous utilisons le lemme précédent sur chaque tétraèdre $\tilde{C}\,\tilde{A}_2\,\tilde{A}_3\,\tilde{A}_4$, $\tilde{C}\,\tilde{A}_3\,\tilde{A}_4\,\tilde{A}_1$, $\tilde{C}\,\tilde{A}_4\,\tilde{A}_1\,\tilde{A}_2$, $\tilde{C}\,\tilde{A}_1\,\tilde{A}_2\,\tilde{A}_3$; nous concluons que h_i est un polynôme de degré $\leqslant 2$, $i = 1(1)4$.

Par suite, la dérivée normale de f, restreinte à une face et considérée comme une fonction de deux variables, est un polynôme de degré $\leqslant$ 2. Par les hypothèses a et c, cette dérivée normale s'annule le long des trois arêtes de la face. Ainsi, la dérivée normale, restreinte à la face, est nulle. En tenant compte de l'hypothèse c, le gradient de f est nul sur le bord de $\tilde{S}$.



Corollaire.

Les fonctions de référence $\tilde{r}_{10}$ et $\tilde{r}_{13}$ ne peuvent pas être choisies dans $\tilde{\Pi}$.

Théorème.

Soit $\tilde{U}$ une solution du problème élément fini 6.2. Alors $\tilde{U}$ n'est pas inclu dans $\tilde{\Pi}$.

Démonstration.

Supposons par l'absurde que $\tilde{U} \subset \tilde{\Pi}$. Par la condition (iii) du problème élément fini 6.2, il existe $\tilde{r}_1 \in \tilde{U}$ tel que

$$\tilde{H}_1(\tilde{r}_1) = \partial_{\tilde{m}_1} \tilde{r}_1(\tilde{C}_1) = 1,$$

les 43 autres paramètres de $\tilde{r}_1$ étant nuls.

Soit T une face de $\tilde{S}$. D'après la condition (iv) du problème élément fini 6.2, la restriction $\tilde{r}_{1|T}$ appartient à l'espace $U^I(T)$ défini sous 3.6. Comme $\tilde{r}_{1|T}$ est nul le long des trois côtés de T et $\tilde{G}_{ij}(\tilde{r}_1) = 0$ pour $i = 1(1)4$, $j = 1,2,3$, les douze paramètres génériques de la section 3.2 sur T sont nuls pour $\tilde{r}_{1|T}$. Par unisolvance dans $U^I(T)$ (voir théorème 3.6), $\tilde{r}_{1|T} = 0$.

La fonction $\tilde{r}_1$ satisfait maintenant aux hypothèses de la proposition précédente, à savoir $\tilde{r}_1$ est de classe $C^1(\tilde{S})$, $\tilde{r}_1 \in \tilde{\Pi}$ et $\tilde{r}_{1|\partial\tilde{S}} = 0$. Ainsi, $\mathrm{grad}(\tilde{r}_1)\ (\tilde{C}_1) = 0$, ce qui contredit l'hypothèse $\tilde{H}_1(\tilde{r}_1) = 1$.



6.3. Elément tétraédrique générique, élargi à 44 paramètres.

Pour le problème d'interpolation

$$Q: C^1(S) \longrightarrow \mathbb{R}^{44} \quad \text{(voir 6.1)},$$

nous choisissons la base d'interpolation

$$u_i := \tilde{u}_i \circ L^{-1}, \quad i = 1(1)44,$$

où les $\tilde{u}_i$ sont les fonctions d'interpolation de l'élément de référence. Notons U l'espace vectoriel engendré par ces 44 fonctions.

Théorème.

Le problème d'interpolation élargi $Q: U \longrightarrow \mathbb{R}^{44}$ est U-unisolvant.

Démonstration.

Par rapport à la base d'interpolation $\{u_i;\ i = 1(1)44\}$, la matrice d'interpolation de Q a la forme suivante

$$[Q] = \begin{pmatrix} 1 &&&&&&&&&& \\ & D_1^{-1} &&&&&&&&& \\ && 1 &&&&&&&& \\ &&& D_2^{-1} &&&&&&& \\ &&&& 1 &&&&&& \\ &&&&& D_3^{-1} &&&&& \\ &&&&&& 1 &&&& \\ &&&&&&& D_4^{-1} &&& \\ \multicolumn{8}{|c|}{Q_1} & D_5^{-1} && \\ \multicolumn{9}{|c|}{Q_2} & D_6^{-1} & \\ \multicolumn{10}{|c|}{Q_3} & D_7^{-1} \end{pmatrix}$$

où D_1, D_2, D_3, D_4 sont des matrices 3×3,

D_5 est une matrice diagonale 12×12,

D_6 est une matrice diagonale 4×4,

D_7 est une matrice diagonale 12×12,

Q_1 est une matrice 12×16,

Q_2 est une matrice 4×28,

et Q_3 est une matrice 12×32.

Détermination de D_i , $i = 1(1)5$.

Ce calcul correspond point par point à celui de la variante II (voir 5.3). Nous obtenons

$$D_i = \begin{bmatrix} x_j - x_i & y_j - y_i & z_j - z_i \\ x_k - x_i & y_k - y_i & z_k - z_i \\ x_\ell - x_i & y_\ell - y_i & z_\ell - z_i \end{bmatrix}, \quad i = 1(1)4,$$

où (i,j,k,ℓ) est une permutation cyclique des nombres $(1,2,3,4)$;

$$\text{diag } D_5 = (< \ell(\tilde{n}_{11}), n_{11} >, < \ell(\tilde{n}_{12}), n_{12} >, \ldots,$$
$$< \ell(\tilde{n}_{42}), n_{42} >, < \ell(\tilde{n}_{43}), n_{43} >).$$

Détermination de D_6 et D_7.

u_{28+i} s'annule dans la i-ème face de S. Par construction de la fonction de référence $\tilde{u}_{28+i}$, nous avons

$$1 = \tilde{H}_i(\tilde{u}_{28+i}) = \partial_{\tilde{m}_i} (u_{28+i} \circ L) (\tilde{C}_i)$$
$$= \partial_{\ell(\tilde{m}_i)} u_{28+i} (C_i)$$
$$= < \ell(\tilde{m}_i), m_i > H_i (u_{28+i})$$
$$= < \ell(\tilde{m}_i), m_i > Q_{28+i} (u_{28+i}), \quad i = 1(1)4.$$

Définissons

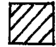
$$d_i := \langle \ell(\tilde{m}_i), m_i \rangle, \quad i = 1(1)4.$$

Nous obtenons

$$\text{diag } D_6 = (d_1, d_2, d_3, d_4).$$

Par un calcul similaire,

$$\text{diag } D_7 = (d_1, d_1, d_1, d_2, d_2, d_2, d_3, d_3, d_3, d_4, d_4, d_4).$$



6.4. Elément fini tétraédrique, de classe C^1, de degré deux, à 16 paramètres.

Nous sommes maintenant en mesure de donner une solution (variante I-C) du problème élément fini 1.2. Dans l'élément générique élargi à 44 paramètres, nous allons remplacer les 28 paramètres auxiliaires par 28 contraintes linéaires.
Afin de satisfaire la condition de raccordement 1.2-(iv), nous exigeons que

6.4-1. "La restriction de la dérivée normale $\partial_{m_i} v$ à la face i, considérée comme une fonction de deux variables, est un polynôme de degré $\leqslant 1$, $i = 1(1)4$."

Pour $u \in U$, la restriction de $\partial_{m_i} u$ à la i-ème face, considérée comme une fonction continue de deux variables, est un polynôme par morceaux de degré $\leqslant 2$. (Les morceaux sont ceux de la figure 3.5, à une transformation affine près.) Par suite, la condition 6.4-1 s'écrit de façon équivalente sous forme de contraintes linéaires

6.4-2. $G_{i1}(u) = \frac{1}{2}\{\partial_{n_{i1}} u(A_k) + \partial_{n_{i1}} u(A_\ell)\}$,

$G_{i2}(u) = \frac{1}{2}\{\partial_{n_{i2}} u(A_\ell) + \partial_{n_{i2}} u(A_j)\}$,

$G_{i3}(u) = \frac{1}{2}\{\partial_{n_{i3}} u(A_j) + \partial_{n_{i3}} u(A_k)\}$,

$H_i\ (u) = \frac{1}{3}\partial_{m_i} u(A_j) + \frac{1}{3}\partial_{m_i} u(A_k) + \frac{1}{3}\partial_{m_i} u(A_\ell)$,

$H_{i1}(u) = \frac{2}{3}\partial_{m_i} u(A_j) + \frac{1}{6}\partial_{m_i} u(A_k) + \frac{1}{6}\partial_{m_i} u(A_\ell)$,

$H_{i2}(u) = \frac{1}{6}\partial_{m_i} u(A_j) + \frac{2}{3}\partial_{m_i} u(A_k) + \frac{1}{6}\partial_{m_i} u(A_\ell)$,

$H_{i3}(u) = \frac{1}{6}\partial_{m_i} u(A_j) + \frac{1}{6}\partial_{m_i} u(A_k) + \frac{2}{3}\partial_{m_i} u(A_\ell)$,

où (i,j,k,ℓ) est une permutation cyclique des nombres $(1,2,3,4)$, $i = 1(1)4$.

Théorème.

L'espace linéaire

$V^I := \{u \in U;$ u respecte les 28 contraintes 6.4-2$\}$

est une solution du problème élément fini 1.2.

Démonstration.

Les contraintes linéaires sont respectées par les polynômes de degré ≤ 2; ainsi, V^I contient tous les polynômes de degré ≤ 2.

D'après 2.8, le problème d'interpolation 1.2-(iii) est V^I-unisolvant.

La propriété 1.2-(v) provient de ce que notre construction ne privilégie aucun sommet. Une vérification numérique sera effectuée dans 8.4-6.

Il reste encore à vérifier les conditions de raccordement. Considérons deux tétraèdres S_1 , S_2 ayant une face commune T de sommets A_1, A_2, A_3. Pour 20 nombres réels donnés, considérons la fonction d'interpolation v_1 sur S_1 et v_2 sur S_2 .

<u>Classe C^o.</u>

Les restrictions $v_{1|T}$ et $v_{2|T}$, considérées comme des fonctions de deux variables, appartiennent à l'espace V^I défini sous 3.7 pour le triangle T. Les 9 paramètres de l'élément bidimensionnel 3.3 ont les mêmes valeurs pour $v_{1|T}$ et $v_{2|T}$. Par suite, $v_{1|T} = v_{2|T}$.

<u>Classe C^1.</u>

Soit m un vecteur normal à la face T. Les dérivées normales $\partial_m v_{1|T}$ et $\partial_m v_{2|T}$, considérées comme des fonctions de deux variables, sont des polynômes de degré $\leqslant 1$. Ces deux fonctions affines coïncident aux trois sommets A_1, A_2, A_3. Par suite, $\partial_m v_{1|T} = \partial_m v_{2|T}$.



<u>Remarque.</u>

La solution du problème d'interpolation 1.2-(iii) et le calcul de la base d'Hermite seront explicités au paragraphe 8.

6.5. Comparaison avec la variante I-A.

En 1976, M. Délèze et J.-J. Goël publièrent le premier élément fini tétraédrique, de classe C^1, de degré deux, à 16 paramètres [6]. Cet élément sera appelé variante I-A par la suite. Il fut republié en 1978 dans "International journal for numerical methods in engineering" [7]; il était accompagné d'un autre élément de degré plus élevé.

Les améliorations apportées à cette première construction ont abouti à la variante I-C présentée ici. Nous indiquons ci-dessous les modifications les plus importantes.

Certains aspects relevant de l'algèbre linéaire.

Dans la variante I-A, nous avions obtenu des formules explicites pour une partie des coefficients

$$t_{ji} = t_{ji}(A_1,A_2,A_3,A_4)$$

exprimant la base d'Hermite par rapport à la base d'interpolation de l'élément générique élargi

$$v_i = \sum_{j=1}^{44} t_{ji}\, u_j \;, \; i = 1(1)16.$$

Nous avons avantageusement remplacé ces calculs explicites par un calcul numérique; il s'agit essentiellement de résoudre des systèmes d'équations linéaires $[Q]s = c$ dont la matrice est triangulaire inférieure par blocs (voir paragraphe 8). Toute la construction s'en trouve ainsi allégée.

La fonction de référence $\tilde{r}_{10}$ (voir 6.2-3).

Dans la variante I-A, les 16 fonctions rationnelles par morceaux ont été introduites ensemble, dans un même bloc. Nous avions

imposé à la fonction $\tilde{r}_{10}$ les trois conditions supplémentaires

$$\tilde{H}_{1j}(\tilde{r}_{10}) = 0 \ , \quad j = 1(1)3,$$

ce qui conduisit à une fonction $\tilde{r}_{10}$ nettement plus compliquée que celle de la variante I-C.

<u>La fonction de référence $\tilde{r}_{13}$</u> (voir 6.2-4)

Dans la fonction $\tilde{r}_{13}$ de la variante I-A, des singularités d'ordre deux apparaissaient le long de certaines arêtes, comme par exemple, dans l'expression

$$\frac{x^2(1-x-y-z)^2}{(1-y-z)^2} \ .$$

Dans la variante I-C, ainsi d'ailleurs que dans la variante I-B, toutes les singularités de toutes les fonctions sont d'ordre $\leqslant 1$ le long des arêtes, comme, par exemple, dans l'expression

$$\frac{x^2(1-x-y-z)}{1-y-z} \ ;$$

de même, toutes les singularités aux sommets sont d'ordre $\leqslant 4$, comme, par exemple, l'expression définie sur $\tilde{S}_1$

$$\frac{x^3(1-x-y-z)^2(y-x)}{y(1-2x-z)(1-x-z)^2}$$

considérée au sommet $\tilde{A}_4$.

6.6. Construction de la variante I-B.

La variante I-B diffère de la variante I-C par les fonctions de référence $\tilde{r}_{10|\tilde{S}_1}$ et $\tilde{r}_{13|\tilde{S}_1}$. Au lieu de construire ces fonctions par addition de termes correctifs, nous utilisons la variante II.

L'évaluation de l'expression obtenue pour $\tilde{r}_{10|\tilde{S}_1}$ comporte un peu plus d'opérations arithmétiques que dans la variante I-C. L'expression obtenue pour $\tilde{r}_{13|\tilde{S}_1}$ possède une forme très semblable à celle de la variante I-C.

Les paramètres de référence.

Aux points $\tilde{C}_{ij}$, nous associons des vecteurs pointant vers $\tilde{A}_i$,

$$\tilde{m}_{11} := (-\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}), \quad \tilde{m}_{12} := (-\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}), \quad \tilde{m}_{13} := (-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}),$$

$$\tilde{m}_{ij} := \phi_i(\tilde{m}_{1j}), \quad j = 1,2,3, \quad i = 1(1)4.$$

Nous remplaçons les paramètres $\tilde{H}_{ij}$ de 6.1 par

$$\tilde{H}^B_{ij}(w) := \partial_{m_{ij}} w(\tilde{C}_{ij}), \quad j = 1,2,3, \quad i = 1(1)4.$$

Ceci a pour effet de modifier la matrice D_7 (voir 6.3) qui devient

$$\text{diag } D^B_7 = (d_{11}, d_{12}, d_{13}, d_{21}, \ldots, d_{43})$$

où $d_{ij} := < \ell(\tilde{m}_{ij}), m_i >, \quad j = 1,2,3, \quad i = 1(1)4.$

Construction de $\tilde{r}_{10|\tilde{S}_1}$ (voir 6.2-3).

Soient $L_1 : \tilde{S} \longrightarrow \tilde{S}_1$, $L_1 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}x \\ \frac{1}{3}x + y \\ \frac{1}{3}x + z \end{bmatrix}$,

$$\nu_3 := \frac{1}{\sqrt{2}} \ \ell_1^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\mu_3 := \phi_3^{-1} \ \nu_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix},$$

$$\nu_4 := \frac{1}{\sqrt{2}} \ \ell_1^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$\mu_4 := \phi_4^{-1} \ \nu_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Nous partons de la fonction

$$a(x,y,z) := 3x^2(1-x-y-z)$$

qui vérifie

$$(\partial_y-\partial_x)a(x,y,z)\Big|_{y-x=0} = -6x(1-x-y-z),$$

$$(\partial_z-\partial_x)a(x,y,z)\Big|_{z-x=0} = -6x(1-x-y-z).$$

Considérons les fonctions rationnelles de la variante II (voir 5.2), spécialement les fonctions $\tilde{w}^{II}_{31}(\nu_3;L_1^{-1}(\ldots))$ et $\tilde{w}^{II}_{43}(\nu_4;L_1^{-1}(\ldots))$. En utilisant la formule 5.2-1,

$$(\partial_y-\partial_x)\tilde{w}^{II}_{31}(\nu_3;3x,-x+y,-x+z)\Big|_{y-x=0}$$

$$= \{\sqrt{2}\ \partial_{\mu_3}\tilde{w}^{II}_{11}(\sqrt{2}\ \mu_3;\ldots)\}\quad(z-x,1-x-y-z,3x)\Big|_{y-x=0}$$

$$= 6x(1-x-y-z);$$

$$(\partial_z-\partial_x)\tilde{w}^{II}_{43}(\nu_4;3x,-x+y,-x+z)\Big|_{z-x=0}$$

$$= \{\partial_{(1,0,-3)}\tilde{w}^{II}_{11}(1,0,-3;\ldots)\}(y-x,1-x-y-z,3x)\Big|_{z-x=0}$$

$$= 6x(1-x-y-z).$$

En utilisant la formule 5.2-2,

$$(\partial_z-\partial_x)\tilde{w}^{II}_{31}(\nu_3;3x,-x+y,-x+z)\Big|_{z-x=0}$$

$$= \{\sqrt{2}\ \partial_{\phi_3^{-1}(\nu_4)}\tilde{w}^{II}_{11}(\mu_3;\ldots)\}(z-x,1-x-y-z,3x)\Big|_{z-x=0}$$

$$= 12x(1-x-y-z),\ \text{puisque}\ \sqrt{2}\phi_3^{-1}(\nu_4) = (2,0,-3);$$

$$(\partial_y-\partial_x)\tilde{w}_{43}^{II}(\nu_4;3x,-x+y,-x+z)\Big|_{y-x=0}$$

$$=\{\partial_{(2,0,-3)}\tilde{w}_{11}^{II}(\mu_{4z},\mu_{4x},\mu_{4y};\ldots)\}(y-x,1-x-y-z,3x)\Big|_{y-x=0}$$

$$=12x(1-x-y-z).$$

C'est pourquoi nous posons

$$\tilde{r}_{10|\tilde{S}_1} := a+\frac{1}{3}\{\tilde{w}_{31}^{II}(\nu_3;\ldots)+\tilde{w}_{43}^{II}(\nu_4;\ldots)\}\circ L_1^{-1},$$

c'est-à-dire

$$\tilde{r}_{10|\tilde{S}_1}(x,y,z) = 3x^2(1-x-y-z) + \frac{1}{3}\tilde{w}_{11}^{II}(1,0,-3;z-x,1-x-y-z,3x) + \frac{1}{3}\tilde{w}_{11}^{II}(1,0,-3;y-x,1-x-y-z,3x)$$

Construction de $\tilde{r}_{13|\tilde{S}_1}$ (voir 6.2-4).

Nous posons

$$\tilde{r}_{13|\tilde{S}_1} := \tilde{w}_{32}^{II}(\nu_3;L_1^{-1}(\ldots)),$$

c'est-à-dire

$$\tilde{r}_{13|\tilde{S}_1}(x,y,z) = \tilde{w}_{32}^{II}(-3,2,1;3x,-x+y,-x+z)$$

$$= \tilde{w}_{12}^{II}(1,0,-3;z-x,1-x-y-z,3x)$$

$$= \tilde{w}_{11}^{II}(0,-3,1;1-x-y-z,3x,z-x)$$

$$= 9x^2(z-x)^2(1-x-y-z)\Big\{\frac{2}{(1+2x-y-z)(1-2x-y)} + \frac{3(1-x-y-z)(y-x)}{(y+z-2x)(2x+y)(1-2x-z)(1-3x)(1+x-z)} \cdot \Big(\frac{(z-x)(2+x-2y-2z)}{1+x-z}-\frac{x(2-3x-2y-z)}{1-3x}\Big)\Big\}.$$

§ 7 VARIANTE II, PROGRAMME.

7.1. Présentation générale de l'élément fini.

Une solution du problème élément fini 1.2 a été construite au paragraphe 5 (variante II). Afin de rendre possible l'utilisation du programme FORTRAN sans avoir à étudier toute la construction, nous décrivons ici, sans entrer dans les détails, la forme des fonctions élément fini.

La solution V^{II} est un sous-espace linéaire d'un espace vectoriel de fonctions U dont on connaît explicitement une base

$$\{u_i := \tilde{u}_i \circ L^{-1}; \quad i = 1(1)28\}.$$

La construction de V^{II} a été effectuée en trois étapes.

7.1-1. L'élément de pseudo-référence.

Nous introduisons un espace vectoriel $\tilde{U}$ de base

$$\{\tilde{u}_i : \tilde{S} \longrightarrow \mathbb{R}; \quad i = 1(1)28\}.$$

Les 16 premières fonctions (bloc 1) sont des polynômes de degré $\leqslant 3$. L'espace engendré par $\{\tilde{u}_1,\ldots,\tilde{u}_{16}\}$ contient tous les polynômes de degré $\leqslant 2$. (Construction, voir 4.3 et 5.2. Programme, voir PT1 et UT28.)

Les 12 dernières fonctions (bloc 2) sont d'une forme analogue à celle de $\tilde{u}_{17}$

$$\begin{aligned}\tilde{u}_{17}(x,y,z) &= \tilde{w}_{11}(\hat{\mu}_{1x},\hat{\mu}_{1y},\hat{\mu}_{1z};x,y,z)\\ &= r_o(x,y,z) + \hat{\mu}_{1x}\, r_1(x,y,z) + \hat{\mu}_{1y}\, r_2(x,y,z)\\ &\quad + \hat{\mu}_{1z}\, r_3(x,y,z),\end{aligned}$$

où r_o, r_1, r_2 et r_3 sont des fonctions rationnelles et $\hat{\mu}_{1x}, \hat{\mu}_{1y}, \hat{\mu}_{1z}$ sont des nombres réels qui dépendent du tétraèdre générique S considéré.

(Construction, voir 5.2. Programme; calcul de $\hat{\mu}_{1x}, \hat{\mu}_{1y}, \hat{\mu}_{1z}$ voir ELEMØ; évaluation des fonctions, voir REFCT, WT11 et UT28.)

Remarque.

Les dérivées des 28 fonctions $\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_{28}$ ont été calculées sous forme analytique. Pour les fonctions rationnelles, nous avons utilisé la formule

$$\partial_t \frac{p}{q_1 \ldots q_n} = \{\partial_t\, p - p\, (\frac{\partial_t\, q_1}{q_1} + \ldots + \frac{\partial_t\, q_n}{q_n})\} \frac{1}{q_1 \ldots q_n}$$

où $t \in \mathbb{R}^3$ et $p, q_1, \ldots, q_n : \tilde{S} \longrightarrow \mathbb{R}$.

(Programme, voir DPT1 , DREFCT, DWT11 et DUT28.)

7.1-2. L'élément générique élargi.

Nous construisons un espace linéaire U dont la base est

$$\{u_i : S \longrightarrow \mathbb{R};\ u_i := \tilde{u}_i \circ L^{-1}, \quad i = 1(1)28\}.$$

(Programme, voir U28.) Les dérivées de ces fonctions sont calculées au moyen de la formule

$$\partial_v(\tilde{u} \circ L^{-1})(P) = \partial_{l^{-1}(v)} \tilde{u}(L^{-1}(P))$$

où $v \in \mathbb{R}^3$, $P \in S$ et ℓ est la partie linéaire de l'application affine L. (Programme, voir DU28.)

On considère un isomorphisme d'espaces vectoriels

$$Q : U \longrightarrow \mathbb{R}^{28}$$

dont la matrice

$$[Q] = (Q(u_1), \ldots, Q(u_{28}))$$

est appelée matrice d'interpolation de l'élément générique élargi. Cette matrice est de la forme

$$[Q] = \left[\begin{array}{cccccccc:c} 1 &&&&&&&& \\ & D_1^{-1} &&&&&&& \\ && 1 &&&&&& \\ &&& D_2^{-1} &&&&& 0 \\ &&&& 1 &&&& \\ &&&&& D_3^{-1} &&& \\ &&&&&& 1 && \\ &&&&&&& D_4^{-1} & \\ \hdashline &&&& Q_1 &&&& D_5^{-1} \end{array}\right]$$

où D_1, D_2, D_3, D_4 sont des matrices 3×3,

D_5 est une matrice diagonale 12×12

et Q_1 est une matrice 12×16.

(Construction, voir 5.3. Programme; initialisation de $D_1, \ldots, D_5$ voir ELEM1 ; initialisation de Q_1 voir ELEM2; résolution de $[Q]s = c$, voir FE2P28.)

7.1-3. <u>L'élément fini, variante II.</u>

La solution V^{II} est un sous-espace linéaire de dimension 16 de U. A l'aide d'une application linéaire $E_1 : \mathbb{R}^{16} \longrightarrow \mathbb{R}^{12}$, nous définissons

$$V^{II} = \{v \in U; \quad \exists c \in \mathbb{R}^{16} \quad Qv = \begin{bmatrix} c \\ E_1 \ c \end{bmatrix}\}$$

$$= \text{image de } T$$

$$\text{où} \quad T := Q^{-1} \begin{bmatrix} I_{16} \\ E_1 \end{bmatrix} : \mathbb{R}^{16} \longrightarrow U.$$

(Construction, voir 2.8 et 5.4.)

<u>Le problème d'interpolation 1.2-(iii).</u>

Pour 16 nombres réels donnés $c_1,\ldots,c_{16}$, trouver $v \in V^{II}$ tel que

$$v(A_i) = c_{4i-3}\ , \qquad \partial_x\, v(A_i) = c_{4i-2}\ ,$$

$$\partial_y\, v(A_i) = c_{4i-1}\ , \qquad \partial_z\, v(A_i) = c_{4i}\ ,$$

$i = 1(1)4.$

La solution s'exprime dans la base de U

$$v = \sum_{j=1}^{28} s_j\, u_j\ .$$

Les coefficients $s_1,\ldots,s_{28}$ sont obtenus en résolvant le système d'équations linéaires

$$[Q]s = \begin{bmatrix} c \\ \\ E_1\ c \end{bmatrix}\ .$$

(Programme; calcul de s voir FE2P16; évaluation de v, voir FINT; évaluation des dérivées directionnelles de v, voir DFINT.)

<u>La base d'Hermite.</u>

La base d'Hermite de V^{II}

$$\{v_i : S \longrightarrow \mathbb{R};\quad i = 1(1)16\}$$

est définie par les relations $v_i \in V^{II}$,

$$v_i(A_j) = \delta_{i,4j-3} \qquad \partial_x\, v_i(A_j) = \delta_{i,4j-2}$$

$$\partial_y\, v_i(A_j) = \delta_{i,4j-1} \qquad \partial_z\, v_i(A_j) = \delta_{i,4j}$$

$j = 1(1)4, \quad i = 1(1)16.$

Ces fonctions s'expriment dans la base de U

$$v_i = \sum_{j=1}^{28} t_{ji}\, u_j \ , \quad i = 1(1)16,$$

$$\text{où } (t_{ji}) = [T] = [Q]^{-1} \begin{bmatrix} I_{16} \\ E_1 \end{bmatrix} .$$

(Programme; initialisation de [T], voir ELEM3; évaluation de v_i , i = 1(1)16, voir HERM; évaluation des dérivées directionnelles de v_i , i = 1(1)16, voir DHERM.)

7.2. Mode d'emploi du programme.

7.2-1. Les subroutines DECOMP et SOLVE.

Le programme 7.3 doit être complété à l'aide des deux subroutines suivantes. La

```
SUBROUTINE DECOMP (NX,NN,A,SC,IPS,D)
```

effectue la décomposition de Gauss de la matrice A, avec choix du pivot par lignes.

Entrées: NX dimension déclarée de la matrice A(NX,NX).

NN nombre de lignes de A.

A matrice carrée à décomposer.

Sorties: A matrice sous forme factorisée.

IPS vecteur contenant la nouvelle numérotation des lignes de A, consécutive au choix des pivots.

D déterminant de A.

SC est un vecteur de travail.

La

SUBROUTINE SOLVE (NX,NN,A,B,X,IPS)

résoud le système d'équations linéaires A*X = B où A est sous la forme décomposée de Gauss.

Entrées: NX dimension déclarée de A(NX,NX).

NN nombre de lignes de A.

A matrice carrée sous forme factorisée.

B membre de droite de l'équation.

IPS vecteur contenant la nouvelle numérotation des lignes de A, consécutive au choix des pivots.

Sortie: X solution de l'équation.

7.2-2. Le problème d'interpolation linéaire.

Afin d'éviter des calculs inutiles, nous organisons le travail selon trois cycles imbriqués.

Le cycle extérieur porte sur les tétraèdres. Chaque fois que l'on considère un nouveau tétraèdre, on doit appeler les subroutines

ELEMØ (X1,Y1,Z1, X2,Y2,Z2, X3,Y3,Z3, X4,Y4,Z4)

ELEM1

ELEM2

où (X1,Y1,Z1), (X2,Y2,Z2), (X3,Y3,Z3), (X4,Y4,Z4) sont les sommets du tétraèdre considéré.

Le cycle intermédiaire porte sur les valeurs des paramètres. Chaque fois que l'on considère une nouvelle fonction d'interpolation, on doit appeler la subroutine

FE2P16 (C,S)

où C et S sont déclarés en dimension C(28) et S(28). A l'entrée,

C(1),...,C(16) contiennent les valeurs des paramètres de l'élément, dans l'ordre suivant

$v(X1,Y1,Z1)$

$\partial_x \; v(X1,Y1,Z1)$

$\partial_y \; v(X1,Y1,Z1)$

$\partial_z \; v(X1,Y1,Z1)$

$v(X2,Y2,Z2)$

... ...

$\partial_z \; v(X4,Y4,Z4)$.

A la sortie, S(1),...,S(28) contiennent les coefficients de la fonction d'interpolation correspondante $v \in V^I$ par rapport à la base $\{u_1,...,u_{28}\}$ de U (voir 7.1-2).

Le <u>cycle intérieur</u> porte sur les points du tétraèdre. Chaque fois que l'on veut évaluer la fonction v en un point (PX,PY,PZ) du tétraèdre, on appelle la fonction

FINT (PX,PY,PZ,S).

Chaque fois que l'on désire calculer la dérivée de v dans la direction (TX,TY,TZ) au point (PX,PY,PZ), on appelle la fonction

DFINT (TX,TY,TZ,PX,PY,PZ,S).

<u>Remarque.</u>

Une partie des communications entre les sous-programmes se fait au moyen d'un bloc commun nommé TETRAS. Ce bloc commun ne dépend que du tétraèdre considéré. Il est initialisé par les subroutines ELEMØ, ELEM1 et ELEM2. Il est utilisé par FE2P16, FINT et DFINT.

7.2-3. La base d'Hermite.

Ce calcul est organisé selon deux cycles imbriqués.

Le cycle extérieur porte sur les tétraèdres. Chaque fois que l'on considère un nouveau tétraèdre, on doit appeler les subroutines

ELEMØ (X1,Y1,Z1, X2,Y2,Z2, X3,Y3,Z3, X4,Y4,Z4)

ELEM1

ELEM2

ELEM3

où (X1,Y1,Z1), (X2,Y2,Z2), (X3,Y3,Z3), (X4,Y4,Z4) sont les sommets du tétraèdre.

Le cycle intérieur porte sur les points du tétraèdre. Chaque fois que l'on veut calculer la base d'Hermite en un point (PX,PY,PZ) du tétraèdre, on appelle la subroutine

HERM(PX,PY,PZ,V)

où V est déclaré en dimension 16. A la sortie, V(1),...,V(16) contiennent les valeurs v_1(PX,PY,PZ),...,v_{16}(PX,PY,PZ). Chaque fois que l'on désire évaluer la dérivée des fonctions $v_1,\dots,v_{16}$ dans la direction (TX,TY,TZ) au point (PX,PY,PZ), on appelle la subroutine

DHERM (TX,TY,TZ, PX,PY,PZ, DV)

où DV est déclaré en dimension 16. A la sortie, DV(1),...,DV(16) contiennent les valeurs des dérivées directionnelles $\partial_t\, v_1(P),\dots,\partial_t\, v_{16}(P)$ où t:= (TX,TY,TZ) et P:= (PX,PY,PZ).

Remarque.

Une partie des communications entre les sous-programmes se fait au moyen d'un bloc commun nommé TETRAS. Ce bloc commun ne dépend que du tétraèdre considéré. Il est initialisé par les subroutines ELEMØ, ELEM1, ELEM2 et ELEM3. Il est utilisé par HERM et DHERM.

7.3. Le programme FORTRAN.

Le programme suivant comprend 783 cartes, imprimées à raison de 60 lignes par page.

```
C*********************************************************************
C*********************************************************************
C*********************************************************************
C****                                                             ****
C****                                                             ****
C****     E L E M E N T    F I N I    T E T R A E D R I Q U E     ****
C****                                                             ****
C****     DE CLASSE C1,   DE DEGRE DEUX,   A SEIZE PARAMETRES,    ****
C****                                                             ****
C****                                                             ****
C****     VARIANTE II.                            MARCEL DELEZE   ****
C****                                             INST. DE MATH.  ****
C****                                             UNIVERSITE      ****
C****                                             1700 FRIBOURG   ****
C****     FEVRIER 1978.                           SWITZERLAND     ****
C****                                                             ****
C*********************************************************************
C*********************************************************************
C---------------------------------------------------------------------
C

C
```

Les programmes ont été numérisés sous la forme de fichiers textes :

http://www.deleze.name/~marcel//maths/FORTRAN/index.html

```
      RETURN
      END
C---------------------------------------------------------------------
C
      SUBROUTINE REFCT (WT,XT,YT,ZT, R0,R1,R2,R3)
C
C---------------------------------------------------------------------
C**** BASE D'INTERPOLATION DE L'ELEMENT DE PSEUDO-REFERENCE.
C**** VALEURS DES FONCTIONS RATIONNELLES R0, R1, R2 ET R3
C**** AU POINT (XT,YT,ZT). WT=1.-XT-YT-ZT.
C**** NOUS SUPPOSONS QUE LE POINT (XT,YT,ZT) NE SOIT PAS SITUE SUR
C**** UNE ARETE DU TETRAEDRE.
      W=WT
      X=XT
      Y=YT
      Z=ZT
      R0=2.*X*Y*Y*Z*Z/((X+Y)*(X+Z))
      R =2.*X*X*Y*Y*Z*Z*W/((W+X)*(W+Y)*(W+Z)*(1.-Y)*(1.-Z))
      R1=R*(-1. - Y*Z*(1.+X)/((1.-Y)*(1.-Z)))
      R2=R*Z*(2.*X+Y)/(1.-Z)
      R3=R*Y*(2.*X+Z)/(1.-Y)
      RETURN
      END
C---------------------------------------------------------------------
C
      FUNCTION WT11 (MUX,MUY,MUZ, WT,XT,YT,ZT)
```

```
C
C-----------------------------------------------------------------------
C**** BASE D'INTERPOLATION DE L'ELEMENT DE PSEUDO-REFERENCE.
C**** VALEUR DE LA FONCTION RATIONNELLE WT(1,1,MU)
C**** AU POINT (XT,YT,ZT) DU TETRAEDRE DE REFERENCE. WT=1.-XT-YT-ZT.
C**** LA DIRECTION NORMALE DEPLACEE (MUX, MUY, MUZ) DEPEND DU TETRAEDRE
C**** GENERIQUE.       NOUS SUPPOSONS QUE     MUX+MUY+MUZ = 1.
      REAL MUX,MUY,MUZ
      DATA EPS /0.5E-06/
      W=WT
      X=XT
      Y=YT
      Z=ZT
      IF (X.GT.EPS .AND. Y.GT.EPS .AND. Z.GT.EPS) GO TO 30
C**** DANS LES FACES 2, 3 ET 4, ON A
      WT11=0.0
      RETURN
   30 CONTINUE
      IF (W.GT.EPS) GO TO 40
C**** A L'INTERIEUR DE LA FACE 1, ON A
      WT11=2.*X*Y*Y*Z*Z/((X+Y)*(X+Z))
      RETURN
   40 CONTINUE
C**** A L'INTERIEUR DU TETRAEDRE, ON A
      CALL REFCT(W,X,Y,Z,R0,R1,R2,R3)
      WT11=R0 + MUX*R1 + MUY*R2 + MUZ*R3
      RETURN
      END
C-----------------------------------------------------------------------
C
      SUBROUTINE UT28 (NFCT, XT,YT,ZT, UT)
C
C-----------------------------------------------------------------------
C**** BASE D'INTERPOLATION DE L'ELEMENT DE PSEUDO-REFERENCE.
C**** VALEUR DE UT(1), ..., UT(NFCT) AU POINT (XT,YT,ZT) DU TETRAEDRE DE
C**** REFERENCE.
C**** NFCT PEUT PRENDRE LES VALEURS 16 OU 28.
C**** LES DIRECTIONS NORMALES DEPLACEES MUX(I), MUY(I), MUZ(I), I=1(1)4,
C**** DEPENDENT DU TETRAEDRE GENERIQUE.
      REAL LL, MUX,MUY,MUZ, NX,NY,NZ
      COMMON /TETRAS/ X(4),Y(4),Z(4),
     1         NX(4,3),NY(4,3),NZ(4,3), MUX(4),MUY(4),MUZ(4),
     2         D(4,3,3),D5(12),Q1(12,16), T(28,16), LL(3,3),IPERM(3)
      DIMENSION UT(28)
      NFCS=NFCT
      XL=XT
      YL=YT
      ZL=ZT
      WL=1.-XL-YL-ZL
      DO 90 I=1,4
C****    BLOC 1.   FONCTIONS NUMEROS 1 A 16.
         IND=4*I-3
         UT(IND  )=PT1(0,WL,XL,YL,ZL)
         UT(IND+1)=PT1(1,WL,XL,YL,ZL)
         UT(IND+2)=PT1(1,WL,YL,ZL,XL)
         UT(IND+3)=PT1(1,WL,ZL,XL,YL)
         IF (NFCS.LE.16) GO TO 80
C****    BLOC 2.   FONCTIONS NUMEROS 17 A 28.
         IND=3*I+14
         UT(IND  )=WT11(MUX(I),MUY(I),MUZ(I),WL,XL,YL,ZL)
```

```
      UT(IND+1)=WT11(MUY(I),MUZ(I),MUX(I),WL,YL,ZL,XL)
      UT(IND+2)=WT11(MUZ(I),MUX(I),MUY(I),WL,ZL,XL,YL)
   80 CH=WL
      WL=XL
      XL=YL
      YL=ZL
      ZL=CH
   90 CONTINUE
      RETURN
      END
C-----------------------------------------------------------------------
C
      FUNCTION DPT1 (J, TX,TY,TZ, WT,XT,YT,ZT)
C
C-----------------------------------------------------------------------
C**** BASE D'INTERPOLATION DE L'ELEMENT DE PSEUDO-REFERENCE.
C**** DERIVEE DU POLYNOME DE DEGRE TROIS PT(1,J) DANS LA DIRECTION
C**** (TX,TY,TZ) AU POINT (XT,YT,ZT).
C**** J PEUT PRENDRE LES VALEURS 0 OU 1. WT=1.-XT-YT-ZT.
      W=WT
      X=XT
      Y=YT
      Z=ZT
      T1=TX
      T2=TY
      T3=TZ
      T0=-T1-T2-T3
      IF (J) 10,10,11
   10 P=2.-W    -2.*(X*X+Y*Y+Z*Z+X*Y+Y*Z+Z*X)
      DP =-T0 - 2.*( T1*(2.*X+Y+Z)+T2*(2.*Y+Z+X)+T3*(2.*Z+X+Y) )
      GO TO 20
   11 P=X*(W+0.5*(Y+Z))
      DP =T0*X + T1*(W+0.5*(Y+Z)) + (T2+T3)*0.5*X
   20 DPT1=T0*P + W*DP
      RETURN
      END
C-----------------------------------------------------------------------
C
      SUBROUTINE DREFCT (TX,TY,TZ, WT,XT,YT,ZT, DR0,DR1,DR2,DR3)
C
C-----------------------------------------------------------------------
C**** BASE D'INTERPOLATION DE L'ELEMENT DE PSEUDO-REFERENCE.
C**** DERIVEES DES FONCTIONS RATIONNELLES R0, R1, R2 ET R3
C**** DANS LA DIRECTION (TX,TY,TZ) AU POINT (XT,YT,ZT). WT=1.-XT-YT-ZT.
C**** NOUS SUPPOSONS QUE LE POINT (XT,YT,ZT) NE SOIT PAS SITUE SUR
C**** UNE ARETE DU TETRAEDRE.
      W=WT
      X=XT
      Y=YT
      Z=ZT
      T1=TX
      T2=TY
      T3=TZ
      T0=-T1-T2-T3
C**** DERIVEE DE R0.
      P  =2.*X*Y*Y*Z*Z
      DP =2.*Y*Z*(T1*Y*Z+2.*X*(T2*Z+T3*Y))
      Q  =(X+Y)*(X+Z)
      DR0=(DP - P*( (T1+T2)/(X+Y)+(T1+T3)/(X+Z) ))/Q
C**** DERIVEE DE R.
```

```
      P   =2.*X*X*Y*Y*Z*Z*W
      DP =2.*X*Y*Z*( T0*X*Y*Z+2.*W*(T1*Y*Z+T2*X*Z+T3*X*Y) )
      Q   =(W+X)*(W+Y)*(W+Z)*(1.-Y)*(1.-Z)
      R   =P/Q
      DR =(DP - P*( (T0+T1)/(W+X)+(T0+T2)/(W+Y)+(T0+T3)/(W+Z)
     1                -T2/(1.-Y)-T3/(1.-Z) ))/Q
C**** DERIVEE DE R1.
      P   =R*Y*Z*(1.+X)
      DP =DR*Y*Z*(1.+X) + R*( T1*Y*Z+(1.+X)*(T2*Z+T3*Y) )
      Q   =(1.-Y)*(1.-Z)
      DR1=-DR - (DP - P*( -T2/(1.-Y)-T3/(1.-Z) ))/Q
C**** DERIVEE DE R2.
      P   =R*Z*(2.*X+Y)
      DP =DR*Z*(2.*X+Y) + R*( (T1*2.+T2)*Z+T3*(2.*X+Y) )
      Q   =1.-Z
      DR2=(DP - P*(-T3/Q))/Q
C**** DERIVEE DE R3.
      P   =R*Y*(2.*X+Z)
      DP =DR*Y*(2.*X+Z) + R*( Y*(2.*T1+T3)+T2*(2.*X+Z) )
      Q   =1.-Y
      DR3=(DP - P*(-T2/Q))/Q
      RETURN
      END
C-----------------------------------------------------------------------
C
      FUNCTION DWT11 (TX,TY,TZ, MUX,MUY,MUZ, WT,XT,YT,ZT)
C
C-----------------------------------------------------------------------
C**** BASE D'INTERPOLATION DE L'ELEMENT DE PSEUDO-REFERENCE.
C**** DERIVEE DE LA FONCTION RATIONNELLE WT(1,1,MU) DANS LA DIRECTION
C**** (TX,TY,TZ) AU POINT (XT,YT,ZT) DU TETRAEDRE DE REFERENCE.
C**** WT=1.-XT-YT-ZT.
C**** LA DIRECTION NORMALE DEPLACEE (MUX, MUY, MUZ) DEPEND DU TETRAEDRE
C**** GENERIQUE.   NOUS SUPPOSONS QUE   MUX+MUY+MUZ = 1.
      REAL MUX,MUY,MUZ
      DATA EPS /0.5E-06/
      W=WT
      X=XT
      Y=YT
      Z=ZT
      IF (Y.GT.EPS .AND. W+Y.GT.EPS .AND.
     1    Z.GT.EPS .AND. W+Z.GT.EPS) GO TO 30
C**** DANS LES FACES 3 ET 4, ON A
      DWT11=0.0
      RETURN
   30 CONTINUE
      T1=TX
      T2=TY
      T3=TZ
      IF (X.GT.EPS .AND. W+X.GT.EPS) GO TO 40
C**** DANS LA FACE 2, ON A
      DWT11=2.*T1*Y*Z
      RETURN
   40 CONTINUE
C**** A L'INTERIEUR DU TETRAEDRE ET A L'INTERIEUR DE LA FACE 1, ON A
      CALL DREFCT(T1,T2,T3,W,X,Y,Z,DR0,DR1,DR2,DR3)
      DWT11=DR0 + MUX*DR1 + MUY*DR2 + MUZ*DR3
      RETURN
      END
C-----------------------------------------------------------------------
```

```
C
      SUBROUTINE DUT28 (NFCT, TX,TY,TZ, XT,YT,ZT, DUT)
C
C-----------------------------------------------------------------------
C**** BASE D'INTERPOLATION DE L'ELEMENT DE PSEUDO-REFERENCE.
C**** DERIVEE DE UT(1), ..., UT(NFCT) DANS LA DIRECTION (TX, TY, TZ)
C**** AU POINT (XT,YT,ZT) DU TETRAEDRE DE REFERENCE.
C**** NFCT PEUT PRENDRE LES VALEURS 16 OU 28.
C**** LES DIRECTIONS NORMALES DEPLACEES MUX(I), MUY(I), MUZ(I), I=1(1)4,
C**** DEPENDENT DU TETRAEDRE GENERIQUE.
      REAL LL, MUX,MUY,MUZ, NX,NY,NZ
      COMMON /TETRAS/ X(4),Y(4),Z(4),
     1       NX(4,3),NY(4,3),NZ(4,3), MUX(4),MUY(4),MUZ(4),
     2       D(4,3,3),D5(12),Q1(12,16), T(28,16), LL(3,3),IPERM(3)
      DIMENSION DUT(28)
      NFCS=NFCT
      XL=XT
      YL=YT
      ZL=ZT
      WL=1.-XL-YL-ZL
      T1=TX
      T2=TY
      T3=TZ
      T0=-T1-T2-T3
      DO 90 I=1,4
C****    BLOC 1.   FONCTIONS NUMEROS 1 A 16.
         IND=4*I-3
         DUT(IND  )=DPT1(0,T1,T2,T3,WL,XL,YL,ZL)
         DUT(IND+1)=DPT1(1,T1,T2,T3,WL,XL,YL,ZL)
         DUT(IND+2)=DPT1(1,T2,T3,T1,WL,YL,ZL,XL)
         DUT(IND+3)=DPT1(1,T3,T1,T2,WL,ZL,XL,YL)
         IF (NFCS.LE.16) GO TO 80
C****    BLOC 2.   FONCTIONS NUMEROS 17 A 28.
         IND=3*I+14
         DUT(IND  )=DWT11(T1,T2,T3,MUX(I),MUY(I),MUZ(I),WL,XL,YL,ZL)
         DUT(IND+1)=DWT11(T2,T3,T1,MUY(I),MUZ(I),MUX(I),WL,YL,ZL,XL)
         DUT(IND+2)=DWT11(T3,T1,T2,MUZ(I),MUX(I),MUY(I),WL,ZL,XL,YL)
   80    CH=WL
         WL=XL
         XL=YL
         YL=ZL
         ZL=CH
         CH=T0
         T0=T1
         T1=T2
         T2=T3
         T3=CH
   90 CONTINUE
      RETURN
      END
C-----------------------------------------------------------------------
C
      SUBROUTINE ELEM0 (X1,Y1,Z1, X2,Y2,Z2, X3,Y3,Z3, X4,Y4,Z4)
C
C-----------------------------------------------------------------------
C**** ELEMENT GENERIQUE ELARGI.
C**** INITIALISATIONS RELATIVES AU TETRAEDRE GENERIQUE.
C**** ENTREES  :  X1,Y1,Z1, X2,Y2,Z2, X3,Y3,Z3, X4,Y4,Z4,  SOMMETS DU
C****                      TETRAEDRE GENERIQUE.
C**** SORTIES  :  TETRAS BLOC COMMUN PAR LEQUEL SE FONT LES SORTIES.
```

```
C****            LL     PARTIE LINEAIRE DE L'APPLICATION AFFINE L,
C****                   FACTORISEE SELON LA METHODE DE GAUSS.
C****            IPERM  VECTEUR CONTENANT LA NOUVELLE NUMEROTATION DES
C****                   LIGNES DE LL, CONSECUTIVE AU CHOIX DES PIVOTS.
C****            NX(I,J), NY(I,J), NZ(I,J), J=1,2,3, I=1(1)4, VECTEURS
C****                   PARALLELES A LA I-EME FACE ET NORMAUX AUX
C****                   ARETES DU TETRAEDRE.
C****            MUX(I), MUY(I), MUZ(I), I=1(1)4, DIRECTIONS NORMALES
C****                   DEPLACEES. CHAQUE VECTEUR A ETE MULTIPLIE PAR
C****                   UN SCALAIRE TEL QUE LE PRODUIT SATISFASSE
C****                   MUX(I) + MUY(I) +MUZ(I) = 1,   I=1(1)4.
      REAL LL, MUX,MUY,MUZ, NX,NY,NZ
      COMMON /TETRAS/ X(4),Y(4),Z(4),
     1       NX(4,3),NY(4,3),NZ(4,3), MUX(4),MUY(4),MUZ(4),
     2       D(4,3,3),D5(12),Q1(12,16), T(28,16), LL(3,3),IPERM(3)
      DIMENSION GEN(3),REF(3)
      X(1)=X1
      Y(1)=Y1
      Z(1)=Z1
      X(2)=X2
      Y(2)=Y2
      Z(2)=Z2
      X(3)=X3
      Y(3)=Y3
      Z(3)=Z3
      X(4)=X4
      Y(4)=Y4
      Z(4)=Z4
C**** PARTIE LINEAIRE DE L'APPLICATION AFFINE L.
      LL(1,1)=X(2)-X(1)
      LL(2,1)=Y(2)-Y(1)
      LL(3,1)=Z(2)-Z(1)
      LL(1,2)=X(3)-X(1)
      LL(2,2)=Y(3)-Y(1)
      LL(3,2)=Z(3)-Z(1)
      LL(1,3)=X(4)-X(1)
      LL(2,3)=Y(4)-Y(1)
      LL(3,3)=Z(4)-Z(1)
      CALL DECOMP(3,3,LL,GEN,IPERM,DET)
C**** VOL = ABS(DET)/6. EST LE VOLUME DU TETRAEDRE.
C**** SI LE TETRAEDRE EST DEGENERE (VOL=Ø.), LA SUBROUTINE DECOMP
C**** IMPRIME UN MESSAGE D'ERREUR.
      DO 6Ø I=1,4
         J=MOD(I,4)+1
         K=MOD(J,4)+1
         L=MOD(K,4)+1
C****    VECTEUR NORMAL A LA I-EME FACE, PLACE DANS GEN.
         GEN(1)=(Y(K)-Y(J))*(Z(L)-Z(J))-(Z(K)-Z(J))*(Y(L)-Y(J))
         GEN(2)=(Z(K)-Z(J))*(X(L)-X(J))-(X(K)-X(J))*(Z(L)-Z(J))
         GEN(3)=(X(K)-X(J))*(Y(L)-Y(J))-(Y(K)-Y(J))*(X(L)-X(J))
C****    VECTEURS PARALLELES A LA I-EME FACE ET NORMAUX AUX ARETES.
         NX(I,1)=GEN(2)*(Z(L)-Z(K))-GEN(3)*(Y(L)-Y(K))
         NY(I,1)=GEN(3)*(X(L)-X(K))-GEN(1)*(Z(L)-Z(K))
         NZ(I,1)=GEN(1)*(Y(L)-Y(K))-GEN(2)*(X(L)-X(K))
         S=SQRT(NX(I,1)**2+NY(I,1)**2+NZ(I,1)**2)
         NX(I,1)=NX(I,1)/S
         NY(I,1)=NY(I,1)/S
         NZ(I,1)=NZ(I,1)/S
         NX(I,2)=GEN(2)*(Z(J)-Z(L))-GEN(3)*(Y(J)-Y(L))
         NY(I,2)=GEN(3)*(X(J)-X(L))-GEN(1)*(Z(J)-Z(L))
```

```
      NZ(I,2)=GEN(1)*(Y(J)-Y(L))-GEN(2)*(X(J)-X(L))
      S=SQRT(NX(I,2)**2+NY(I,2)**2+NZ(I,2)**2)
      NX(I,2)=NX(I,2)/S
      NY(I,2)=NY(I,2)/S
      NZ(I,2)=NZ(I,2)/S
      NX(I,3)=GEN(2)*(Z(K)-Z(J))-GEN(3)*(Y(K)-Y(J))
      NY(I,3)=GEN(3)*(X(K)-X(J))-GEN(1)*(Z(K)-Z(J))
      NZ(I,3)=GEN(1)*(Y(K)-Y(J))-GEN(2)*(X(K)-X(J))
      S=SQRT(NX(I,3)**2+NY(I,3)**2+NZ(I,3)**2)
      NX(I,3)=NX(I,3)/S
      NY(I,3)=NY(I,3)/S
      NZ(I,3)=NZ(I,3)/S
C****   DIRECTION NORMALE DEPLACEE RELATIVE A LA I-EME FACE.
      CALL SOLVE (3,3,LL,GEN,REF,IPERM)
      GO TO (10,20,30,40), I
   10   MUX(1)=REF(1)
      MUY(1)=REF(2)
      MUZ(1)=REF(3)
      GO TO 50
   20   MUX(2)=REF(2)
      MUY(2)=REF(3)
      MUZ(2)=-REF(1)-REF(2)-REF(3)
      GO TO 50
   30   MUX(3)=REF(3)
      MUY(3)=-REF(1)-REF(2)-REF(3)
      MUZ(3)=REF(1)
      GO TO 50
   40   MUX(4)=-REF(1)-REF(2)-REF(3)
      MUY(4)=REF(1)
      MUZ(4)=REF(2)
   50   S=MUX(I)+MUY(I)+MUZ(I)
      MUX(I)=MUX(I)/S
      MUY(I)=MUY(I)/S
      MUZ(I)=MUZ(I)/S
   60 CONTINUE
      RETURN
      END
C-----------------------------------------------------------------------
C
      SUBROUTINE U28 (NFCT, PX,PY,PZ, U)
C
C-----------------------------------------------------------------------
C**** BASE D'INTERPOLATION DE L'ELEMENT GENERIQUE ELARGI.
C**** VALEUR DE U(1), ..., U(NFCT) AU POINT (PX, PY, PZ) DU TETRAEDRE.
C**** NFCT PEUT PRENDRE LES VALEURS 16 OU 28.
      REAL LL, MUX,MUY,MUZ, NX,NY,NZ
      COMMON /TETRAS/ X(4),Y(4),Z(4),
     1       NX(4,3),NY(4,3),NZ(4,3), MUX(4),MUY(4),MUZ(4),
     2       D(4,3,3),D5(12),Q1(12,16), T(28,16), LL(3,3),IPERM(3)
      DIMENSION U(28),GEN(3),REF(3)
      DATA   NERR/0/,   EPS/-1.E-03/
      GEN(1)=PX-X(1)
      GEN(2)=PY-Y(1)
      GEN(3)=PZ-Z(1)
      CALL SOLVE(3,3,LL,GEN,REF,IPERM)
      XT=REF(1)
      YT=REF(2)
      ZT=REF(3)
      IF (XT.GT.EPS .AND. YT.GT.EPS .AND. ZT.GT.EPS .AND.
     1    1.-XT-YT-ZT.GT.EPS) GO TO 20
```

```
C**** LE POINT (PX, PY, PZ) EST A L'EXTERIEUR DU TETRAEDRE GENERIQUE.
      IF (NERR.LT.10) PRINT 10
   10 FORMAT(10X,40H*** ERROR MESSAGE CALLED FROM U28    *** ,10X,
     1       33H THE POINT IS OUTSIDE THE ELEMENT   )
      NERR=NERR+1
   20 CONTINUE
C**** VALEURS DES FONCTIONS DE BASE.
      CALL UT28(NFCT,XT,YT,ZT,U)
      RETURN
      END
C-----------------------------------------------------------------------
C
      SUBROUTINE DU28 (NFCT, VX,VY,VZ, PX,PY,PZ, DU)
C
C-----------------------------------------------------------------------
C**** BASE D'INTERPOLATION DE L'ELEMENT GENERIQUE ELARGI.
C**** DERIVEE DE U(1), ..., U(NFCT) DANS LA DIRECTION (VX, VY, VZ)
C**** AU POINT (PX,PY,PZ) DU TETRAEDRE GENERIQUE.
C**** NFCT PEUT PRENDRE LES VALEURS 16 OU 28.
      REAL LL, MUX,MUY,MUZ, NX,NY,NZ
      COMMON /TETRAS/ X(4),Y(4),Z(4),
     1       NX(4,3),NY(4,3),NZ(4,3), MUX(4),MUY(4),MUZ(4),
     2       D(4,3,3),D5(12),Q1(12,16), T(28,16), LL(3,3),IPERM(3)
      DIMENSION DU(28),GEN(3),REF(3)
      DATA   NERR/0/,   EPS/-1.E-03/
      GEN(1)=VX
      GEN(2)=VY
      GEN(3)=VZ
      CALL SOLVE(3,3,LL,GEN,REF,IPERM)
      TX=REF(1)
      TY=REF(2)
      TZ=REF(3)
      GEN(1)=PX-X(1)
      GEN(2)=PY-Y(1)
      GEN(3)=PZ-Z(1)
      CALL SOLVE(3,3,LL,GEN,REF,IPERM)
      XT=REF(1)
      YT=REF(2)
      ZT=REF(3)
      IF (XT.GT.EPS .AND. YT.GT.EPS .AND. ZT.GT.EPS .AND.
     1    1.-XT-YT-ZT.GT.EPS) GO TO 20
C**** LE POINT (PX, PY, PZ) EST A L'EXTERIEUR DU TETRAEDRE GENERIQUE.
      IF (NERR.LT.10) PRINT 10
   10 FORMAT(10X,40H*** ERROR MESSAGE CALLED FROM DU28   *** ,10X,
     1       33H THE POINT IS OUTSIDE THE ELEMENT   )
      NERR=NERR+1
   20 CONTINUE
C**** DERIVEES DES FONCTIONS DE BASE.
      CALL DUT28(NFCT,TX,TY,TZ,XT,YT,ZT,DU)
      RETURN
      END
C-----------------------------------------------------------------------
C
      SUBROUTINE ELEM1
C
C-----------------------------------------------------------------------
C**** MATRICE D'INTERPOLATION DE L'ELEMENT GENERIQUE ELARGI.
C**** INITIALISATION DE L'INVERSE DES BLOCS DIAGONAUX DE LA MATRICE Q.
      REAL LL, MUX,MUY,MUZ, NX,NY,NZ
      COMMON /TETRAS/ X(4),Y(4),Z(4),
```

```
     1        NX(4,3),NY(4,3),NZ(4,3), MUX(4),MUY(4),MUZ(4),
     2        D(4,3,3),D5(12),Q1(12,16), T(28,16), LL(3,3),IPERM(3)
      DO 10 I=1,4
         J=MOD(I,4)+1
         K=MOD(J,4)+1
         L=MOD(K,4)+1
C****    INITIALISATION DE D1, D2, D3 OU D4.
         D(I,1,1)=X(J)-X(I)
         D(I,1,2)=Y(J)-Y(I)
         D(I,1,3)=Z(J)-Z(I)
         D(I,2,1)=X(K)-X(I)
         D(I,2,2)=Y(K)-Y(I)
         D(I,2,3)=Z(K)-Z(I)
         D(I,3,1)=X(L)-X(I)
         D(I,3,2)=Y(L)-Y(I)
         D(I,3,3)=Z(L)-Z(I)
C****    INITIALISATION DE D5.
         IND=3*I-2
         D5(IND  )=NX(I,1)*(2.*X(J)-X(K)-X(L))
     1             +NY(I,1)*(2.*Y(J)-Y(K)-Y(L))
     2             +NZ(I,1)*(2.*Z(J)-Z(K)-Z(L))
         D5(IND+1)=NX(I,2)*(2.*X(K)-X(L)-X(J))
     1             +NY(I,2)*(2.*Y(K)-Y(L)-Y(J))
     2             +NZ(I,2)*(2.*Z(K)-Z(L)-Z(J))
         D5(IND+2)=NX(I,3)*(2.*X(L)-X(J)-X(K))
     1             +NY(I,3)*(2.*Y(L)-Y(J)-Y(K))
     2             +NZ(I,3)*(2.*Z(L)-Z(J)-Z(K))
   10 CONTINUE
      RETURN
      END
C-----------------------------------------------------------------------
C
      SUBROUTINE ELEM2
C
C-----------------------------------------------------------------------
C**** MATRICE D'INTERPOLATION DE L'ELEMENT GENERIQUE ELARGI.
C**** INITIALISATION DU BLOC Q1 DE Q.
      REAL LL, MUX,MUY,MUZ, NX,NY,NZ
      COMMON /TETRAS/ X(4),Y(4),Z(4),
     1        NX(4,3),NY(4,3),NZ(4,3), MUX(4),MUY(4),MUZ(4),
     2        D(4,3,3),D5(12),Q1(12,16), T(28,16), LL(3,3),IPERM(3)
      DIMENSION DU(28)
      DO 40 I=1,4
         J=MOD(I,4)+1
         K=MOD(J,4)+1
         L=MOD(K,4)+1
         BX=0.5*(X(K)+X(L))
         BY=0.5*(Y(K)+Y(L))
         BZ=0.5*(Z(K)+Z(L))
         CALL DU28(16,NX(I,1),NY(I,1),NZ(I,1),BX,BY,BZ,DU)
         IND=3*I-2
         DO 10 M=1,16
            Q1(IND,M)=DU(M)
   10    CONTINUE
         BX=0.5*(X(J)+X(L))
         BY=0.5*(Y(J)+Y(L))
         BZ=0.5*(Z(J)+Z(L))
         CALL DU28(16,NX(I,2),NY(I,2),NZ(I,2),BX,BY,BZ,DU)
         IND=IND+1
         DO 20 M=1,16
```

```
         Q1(IND,M)=DU(M)
   20    CONTINUE
         BX=0.5*(X(K)+X(J))
         BY=0.5*(Y(K)+Y(J))
         BZ=0.5*(Z(K)+Z(J))
         CALL DU28(16,NX(I,3),NY(I,3),NZ(I,3),BX,BY,BZ,DU)
         IND=IND+1
         DO 30 M=1,16
            Q1(IND,M)=DU(M)
   30    CONTINUE
   40 CONTINUE
      RETURN
      END
C-----------------------------------------------------------------------
C
      SUBROUTINE FE2P28 (C, S)
C
C-----------------------------------------------------------------------
C**** ELEMENT GENERIQUE ELARGI.
C**** ENTREES  :  TETRAS BLOC COMMUN QUI DOIT AVOIR ETE PREALABLEMENT
C****                    INITIALISE A L'AIDE DES SUBROUTINES ELEM0,
C****                    ELEM1 ET ELEM2.
C****             C(1), ..., C(28) VALEURS DES PARAMETRES DE L'ELEMENT.
C**** SORTIES  :  S(1), ..., S(28) COORDONNEES DE LA FONCTION D'INTER-
C****                    POLATION DANS LA BASE D'INTERPOLATION DE
C****                    L'ELEMENT GENERIQUE ELARGI.
C**** METHODE  :  RESOLUTION DU SYSTEME LINEAIRE Q*S = C.
      REAL LL, MUX,MUY,MUZ, NX,NY,NZ
      COMMON /TETRAS/ X(4),Y(4),Z(4),
     1       NX(4,3),NY(4,3),NZ(4,3), MUX(4),MUY(4),MUZ(4),
     2       D(4,3,3),D5(12),Q1(12,16), T(28,16), LL(3,3),IPERM(3)
      DIMENSION C(28),S(28)
C**** CALCUL DE S(1), ..., S(16).
      DO 10 I=1,4
         K=4*I-3
         S(K)=C(K)
         S(K+1)=D(I,1,1)*C(K+1)+D(I,1,2)*C(K+2)+D(I,1,3)*C(K+3)
         S(K+2)=D(I,2,1)*C(K+1)+D(I,2,2)*C(K+2)+D(I,2,3)*C(K+3)
         S(K+3)=D(I,3,1)*C(K+1)+D(I,3,2)*C(K+2)+D(I,3,3)*C(K+3)
   10 CONTINUE
C**** CALCUL DE S(17), ..., S(28).
      DO 30 I=1,12
         SI=0.0
         DO 20 J=1,16
            SI=SI+Q1(I,J)*S(J)
   20    CONTINUE
         K=I+16
         S(K)=D5(I)*(C(K)-SI)
   30 CONTINUE
      RETURN
      END
C-----------------------------------------------------------------------
C
      FUNCTION D1NOD (VX,VY,VZ, M, C)
C
C-----------------------------------------------------------------------
C**** ELEMENT FINI GENERIQUE, DE CLASSE C1, DE DEGRE DEUX,
C**** A 16 PARAMETRES.
C**** DONNEES  :  M       PEUT PRENDRE LES VALEURS 1, 2, 3 OU 4.
C****             C(4*M-2), C(4*M-1) ET C(4*M) DERIVEES PARTIELLES DX,
```

```
C****                    DY ET DZ AU SOMMET A(M).
C****              (VX, VY, VZ) UN VECTEUR.
C**** SORTIE   :  D1NOD  DERIVEE DANS LA DIRECTION (VX, VY, VZ)
C****                    AU SOMMET A(M).
      DIMENSION C(28)
      IND=4*M-2
      D1NOD=VX*C(IND)+VY*C(IND+1)+VZ*C(IND+2)
      RETURN
      END
C-----------------------------------------------------------------------
C
      SUBROUTINE FE2P16 (C, S)
C
C-----------------------------------------------------------------------
C**** ELEMENT FINI GENERIQUE, DE CLASSE C1, DE DEGRE DEUX,
C**** A 16 PARAMETRES.
C**** RESOLUTION DU PROBLEME D'INTERPOLATION.
C**** ENTREES  :  TETRAS BLOC COMMUN QUI DOIT AVOIR ETE PREALABLEMENT
C****                    INITIALISE A L'AIDE DES SUBROUTINES ELEM0,
C****                    ELEM1 ET ELEM2.
C****              C(1), ..., C(16) VALEURS DES PARAMETRES DE L'ELEMENT.
C**** SORTIES  :  S(1), ..., S(28) COORDONNEES DE LA FONCTION D'INTER-
C****                    POLATION DANS LA BASE D'INTERPOLATION DE
C****                    L'ELEMENT GENERIQUE ELARGI.
C**** LES MEMOIRES C(17), ..., C(28) SONT DES PLACES DE TRAVAIL.
      REAL LL, MUX,MUY,MUZ, NX,NY,NZ
      COMMON /TETRAS/ X(4),Y(4),Z(4),
     1        NX(4,3),NY(4,3),NZ(4,3), MUX(4),MUY(4),MUZ(4),
     2        D(4,3,3),D5(12),Q1(12,16), T(28,16), LL(3,3),IPERM(3)
      DIMENSION C(28),S(28)
C**** CALCUL DES PARAMETRES C(17),...,C(28).
      DO 10 I=1,4
         J=MOD(I,4)+1
         K=MOD(J,4)+1
         L=MOD(K,4)+1
         IND=3*I+14
         C(IND  )=0.5*(D1NOD(NX(I,1),NY(I,1),NZ(I,1),K,C)
     1                +D1NOD(NX(I,1),NY(I,1),NZ(I,1),L,C))
         C(IND+1)=0.5*(D1NOD(NX(I,2),NY(I,2),NZ(I,2),L,C)
     1                +D1NOD(NX(I,2),NY(I,2),NZ(I,2),J,C))
         C(IND+2)=0.5*(D1NOD(NX(I,3),NY(I,3),NZ(I,3),J,C)
     1                +D1NOD(NX(I,3),NY(I,3),NZ(I,3),K,C))
   10 CONTINUE
C**** CALCUL DES COORDONNEES S(1),...,S(28).
      CALL FE2P28(C,S)
      RETURN
      END
C-----------------------------------------------------------------------
C
      FUNCTION FINT (PX,PY,PZ, S)
C
C-----------------------------------------------------------------------
C**** ELEMENT FINI GENERIQUE, DE CLASSE C1, DE DEGRE DEUX,
C**** A 16 PARAMETRES.
C**** DONNEES  :  TETRAS BLOC COMMUN QUI DOIT AVOIR ETE PREALABLEMENT
C****                    INITIALISE A L'AIDE DE LA SUBROUTINE ELEM0.
C****              S(1), ..., S(28), COORDONNEES DE LA FONCTION D'INTER-
C****                    POLATION DANS LA BASE D'INTERPOLATION DE
C****                    L'ELEMENT GENERIQUE ELARGI.
C****              (PX, PY, PZ) UN POINT DU TETRAEDRE GENERIQUE.
```

```
C**** SORTIE  :  FINT    VALEUR DE LA FONCTION D'INTERPOLATION DE
C****                    COORDONNEES S AU POINT (PX, PY, PZ).
      DIMENSION U(28),S(28)
      CALL U28(28,PX,PY,PZ,U)
      V=0.0
      DO 10 I=1,28
         V=V+S(I)*U(I)
   10 CONTINUE
      FINT=V
      RETURN
      END
C-----------------------------------------------------------------------
C
      FUNCTION DFINT (VX,VY,VZ, PX,PY,PZ, S)
C
C-----------------------------------------------------------------------
C**** ELEMENT FINI GENERIQUE, DE CLASSE C1, DE DEGRE DEUX,
C**** A 16 PARAMETRES.
C**** DONNEES  :  TETRAS BLOC COMMUN QUI DOIT AVOIR ETE PREALABLEMENT
C****                    INITIALISE A L'AIDE DE LA SUBROUTINE ELEM0.
C****              S(1), ..., S(28), COORDONNEES DE LA FONCTION D'INTER-
C****                    POLATION DANS LA BASE D'INTERPOLATION DE
C****                    L'ELEMENT GENERIQUE ELARGI.
C****              (VX, VY, VZ) UN VECTEUR.
C****              (PX, PY, PZ) UN POINT DU TETRAEDRE GENERIQUE.
C**** SORTIE   :  DFINT  DERIVEE DE LA FONCTION D'INTERPOLATION DE
C****                    COORDONNEES S DANS LA DIRECTION (VX, VY, VZ)
C****                    AU POINT (PX,PY,PZ).
      DIMENSION DU(28),S(28)
      CALL DU28(28,VX,VY,VZ,PX,PY,PZ,DU)
      DV=0.0
      DO 10 I=1,28
         DV=DV+S(I)*DU(I)
   10 CONTINUE
      DFINT=DV
      RETURN
      END
C-----------------------------------------------------------------------
C
      SUBROUTINE ELEM3
C
C-----------------------------------------------------------------------
C**** ELEMENT FINI GENERIQUE, DE CLASSE C1, DE DEGRE DEUX,
C**** A 16 PARAMETRES.
C**** BASE D'HERMITE.  INITIALISATION DE LA MATRICE T.
      REAL LL, MUX,MUY,MUZ, NX,NY,NZ
      COMMON /TETRAS/ X(4),Y(4),Z(4),
     1       NX(4,3),NY(4,3),NZ(4,3), MUX(4),MUY(4),MUZ(4),
     2       D(4,3,3),D5(12),Q1(12,16), T(28,16), LL(3,3),IPERM(3)
      DIMENSION C(28), S(28)
      DATA C/28*0.0/
      DO 30 I=1,16
C****    CALCUL DES COEFFICIENTS T(1,I), ..., T(28,I) DU I-EME ELEMENT
C****    DE LA BASE D'HERMITE PAR RAPPORT A LA BASE D'INTERPOLATION DE
C****    L'ELEMENT GENERIQUE ELARGI.
         C(I)=1.0
         CALL FE2P16(C,S)
         DO 20 J=1,28
            T(J,I)=S(J)
   20    CONTINUE
```

```
      C(I)=0.0
   30 CONTINUE
      RETURN
      END
C-----------------------------------------------------------------------
C
      SUBROUTINE HERM (PX,PY,PZ, V)
C
C-----------------------------------------------------------------------
C**** ELEMENT FINI GENERIQUE, DE CLASSE C1, DE DEGRE DEUX,
C**** A 16 PARAMETRES.
C**** BASE D'HERMITE.
C**** ENTREES  :  TETRAS BLOC COMMUN QUI DOIT AVOIR ETE PREALABLEMENT
C****                    INITIALISE A L'AIDE DES SUBROUTINES ELEM0,
C****                    ELEM1, ELEM2 ET ELEM3.
C****              (PX, PY, PZ) UN POINT DU TETRAEDRE GENERIQUE.
C**** SORTIES  :  V(1), ..., V(16) VALEURS DES 16 FONCTIONS DE LA BASE
C****                    D'HERMITE AU POINT (PX, PY, PZ).
      REAL LL, MUX,MUY,MUZ, NX,NY,NZ
      COMMON /TETRAS/ X(4),Y(4),Z(4),
     1        NX(4,3),NY(4,3),NZ(4,3), MUX(4),MUY(4),MUZ(4),
     2        D(4,3,3),D5(12),Q1(12,16), T(28,16), LL(3,3),IPERM(3)
      DIMENSION V(16), U(28)
      CALL U28(28,PX,PY,PZ,U)
      DO 20 I=1,16
         SUM=0.0
         DO 10 J=1,28
            SUM=SUM + T(J,I)*U(J)
   10    CONTINUE
         V(I)=SUM
   20 CONTINUE
      RETURN
      END
C-----------------------------------------------------------------------
C
      SUBROUTINE DHERM (VX,VY,VZ, PX,PY,PZ, DV)
C
C-----------------------------------------------------------------------
C**** ELEMENT FINI GENERIQUE, DE CLASSE C1, DE DEGRE DEUX,
C**** A 16 PARAMETRES.
C**** ENTREES  :  TETRAS BLOC COMMUN QUI DOIT AVOIR ETE PREALABLEMENT
C****                    INITIALISE A L'AIDE DES SUBROUTINES ELEM0,
C****                    ELEM1, ELEM2 ET ELEM3.
C****              (VX, VY, VZ) UN VECTEUR.
C****              (PX, PY, PZ) UN POINT DU TETRAEDRE GENERIQUE.
C**** SORTIES  :  DV(1), ..., DV(16) DERIVEES DES 16 FONCTIONS DE LA
C****                    BASE D'HERMITE DANS LA DIRECTION (VX, VY, VZ)
C****                    AU POINT (PX, PY, PZ).
      REAL LL, MUX,MUY,MUZ, NX,NY,NZ
      COMMON /TETRAS/ X(4),Y(4),Z(4),
     1        NX(4,3),NY(4,3),NZ(4,3), MUX(4),MUY(4),MUZ(4),
     2        D(4,3,3),D5(12),Q1(12,16), T(28,16), LL(3,3),IPERM(3)
      DIMENSION DV(16), DU(28)
      CALL DU28(28,VX,VY,VZ,PX,PY,PZ,DU)
      DO 20 I=1,16
         SUM=0.0
         DO 10 J=1,28
            SUM=SUM + T(J,I)*DU(J)
   10    CONTINUE
         DV(I)=SUM
```

```
20 CONTINUE
   RETURN
   END
```

7.4. Tests numériques.

Nous avons procédé à des vérifications numériques du programme précédent sur l'ordinateur CDC CYBER 73 de l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne. Nous décrivons brièvement les tests effectués.

Remarque.

Nous utiliserons parfois les expressions "soit S un tétraèdre", "choisissons un point dans S", etc.. Pratiquement, les données numériques à choisir librement ont été introduites dans le calcul au moyen d'un générateur de nombres pseudo-aléatoires. Les tests ont été effectués plusieurs fois avec des données différentes.

Test 7.4-1.

Les fonctions rationnelles de référence $\tilde{u}_{17},\ldots,\tilde{u}_{28}$ et leurs dérivées partielles possèdent des indéterminations du type $\frac{0}{0}$ le long des arêtes de $\tilde{S}$. Dans le programme 7.3, ces indéterminations ont été levées comme suit; nous avons écrit l'expression analytique de la restriction de ces fonctions à certaines faces de $\tilde{S}$ et nous avons utilisé cette expression dans un ε-voisinage de ces faces. Nous avons vérifié, par tabulation, la continuité numérique du passage de l'expression analytique dans l'intérieur de $\tilde{S}$ à l'expression analytique pour le bord de $\tilde{S}$.

Test 7.4-2.

Soit S un tétraèdre. Nous avons vérifié que les paramètres de la base d'Hermite $\{v_1,\ldots,v_{16}\}$ de V possèdent les valeurs voulues

$$v_i(A_j) = \delta_{i,4j-3} \qquad \partial_x\, v_i(A_j) = \delta_{i,4j-2}$$

$$\partial_y\, v_i(A_j) = \delta_{i,4j-1} \qquad \partial_z\, v_i(A_j) = \delta_{i,4j}$$

$i = 1(1)16, \quad j = 1(1)4.$

Test 7.4-3.

Nous vérifions que tous les polynômes de degré $\leqslant 2$ appartiennent à $V = V(S)$. Soit $\{p_1,\dots,p_{10}\}$ une base des polynômes de degré $\leqslant 2$. Pour $i = 1(1)10$, nous avons calculé les valeurs $c_{i,1},\dots,c_{i,16}$ des 16 paramètres de p_i ; nous avons déterminé l'interpolant Πp_i de p_i en résolvant un problème d'interpolation; nous avons vérifié que $(p_i - \Pi p_i)$ $(P) = 0$ pour des points $P \in S$.

Test 7.4-4.

Désignons par T_i la i-ème face de S, perpendiculaire au vecteur m_i , $i = 1(1)4$. Nous vérifions que $\forall v \in V$ $\partial_{m_i} v_{|T_i}$ est un polynôme de degré $\leqslant 1$ à deux variables. Soit (i,j,k,ℓ) un permutation cyclique des nombres $(1,2,3,4)$; on a $A_j, A_k, A_\ell \in T_i$; choisissons 16 valeurs de paramètres qui nous déterminent un $v \in V$; choisissons $P \in T_i$,

$$P = b_j\, A_j + b_k\, A_k + b_\ell\, A_\ell \ ,$$

$$b_j \ , b_k \ , b_\ell \geqslant 0, \quad b_j + b_k + b_\ell = 1;$$

calculons l'interpolant linéaire de $\partial_{m_i} v$ dans T_i

$$\Pi_\ell(\partial_{m_i} v)(P) = b_j\ \partial_{m_i} v(A_j) + b_k\ \partial_{m_i} v(A_k) + b_\ell\ \partial_{m_i} v(A_\ell);$$

nous avons vérifié que

$$\{\Pi_\ell(\partial_{m_i} v) - \partial_{m_i} v\}\ (P) = 0.$$

Test 7.4-5.

Considérons une mosaïque de deux tétraèdres S_1 et S_2 possédant une face commune T. En se donnant 4 valeurs de paramètres en chacun des 5 sommets, nous déterminons $v_1 \in V(S_1)$ et $v_2 \in V(S_2)$. En choisissant des points $P \in T$, nous avons vérifié que

$$v_1(P) = v_2(P), \qquad \partial_x v_1(P) = \partial_x v_2(P),$$
$$\partial_y v_1(P) = \partial_y v_2(P), \qquad \partial_z v_1(P) = \partial_z v_2(P).$$

Test 7.4-6.

Soit S un tétraèdre. En choisissant 4 valeurs de paramètres en chacun des 4 sommets, nous déterminons un $v \in V$. Nous vérifions que la solution v de ce problème d'interpolation ne dépend pas de la numérotation des sommets de S. Soient $P \in S$ et $t \in \mathbb{R}^3$; calculons $v(P)$ et $\partial_t v(P)$ pour une numérotation A_1, A_2, A_3, A_4 des sommets; nous avons répété le calcul de $v(P)$ et $\partial_t v(P)$ pour les 24 permutations des sommets de S.

§ 8 VARIANTE I-C, PROGRAMME.

8.1. Présentation générale de l'élément fini.

Une solution du problème élément fini 1.2 a été construite au paragraphe 6 (variante I-C). Afin de rendre possible l'utilisation du programme FORTRAN sans avoir à étudier toute la construction, nous décrivons ici, sans entrer dans les détails, la forme des fonctions élément fini.

La solution V^I est un sous-espace linéaire d'un espace vectoriel de fonctions U dont on connaît explicitement une base

$$\{u_i := \tilde{u}_i \circ L^{-1}; \quad i = 1(1)44\}.$$

La construction de V^I a été effectuée en trois étapes.

8.1-1. L'élément de référence.

Nous introduisons un espace vectoriel $\tilde{U}$ de base

$$\{\tilde{u}_i : \tilde{S} \longrightarrow \mathbb{R}; \quad i = 1(1)44\}.$$

Ces fonctions ne dépendent pas de l'élément générique considéré.

Les 16 premières fonctions (bloc 1) sont des polynômes de degré $\leqslant 3$. L'espace engendré par $\{\tilde{u}_1,\ldots,\tilde{u}_{16}\}$ contient tous les polynômes de degré $\leqslant 2$. (Construction, voir 4.3 et 6.2-1. Programme, voir PT1 et UT44.)

Les 12 fonctions suivantes $\{\tilde{u}_{17},\ldots,\tilde{u}_{28}\}$ (bloc 2) sont des polynômes par morceaux de degré $\leqslant 3$. Le nombre de morceaux à considérer est de 3 pour une fonction, de 8 pour une combinaison linéaire de deux fonctions, et de 12 pour une combinaison linéaire quelconque. (Construction, voir 6.2-2. Programme, voir WT11 et UT44.)

Les 16 fonctions restantes $\{\tilde{u}_{29},\ldots,\tilde{u}_{32}\}$ (bloc 3) et $\{\tilde{u}_{33},\ldots,\tilde{u}_{44}\}$ (bloc 4) sont des fonctions rationnelles par morceaux. Les morceaux à considérer sont les mêmes que dans le bloc 2. (Construction, voir 6.2-3 et 6.2-4. Programme; bloc 3 voir ST1Ø, RT1Ø, UT44; bloc 4 voir ST13, RT13 et UT44.)

Remarque.

Les dérivées des 44 fonctions $\tilde{u}_1,\ldots,\tilde{u}_{44}$ ont été calculées sous forme analytique. Pour les fonctions rationnelles, nous avons utilisé la formule

$$\partial_t \frac{p}{q_1\cdots q_n} = \{\partial_t p - p(\frac{\partial_t q_1}{q_1} + \ldots + \frac{\partial_t q_n}{q_n})\} \frac{1}{q_1\cdots q_n}$$

où $t \in \mathbb{R}^3$ et $p,q_1,\ldots,q_n\colon \tilde{S} \longrightarrow \mathbb{R}$.

(Programme, voir DPT1, DWT11, DST1Ø, DRT1Ø, DST13, DRT13, DUT44.)

8.1-2. L'élément générique élargi.

Nous construisons un espace linéaire U de base

$$\{u_i\colon S \longrightarrow \mathbb{R};\ u_i := \tilde{u}_i \circ L^{-1},\ i = 1(1)44\}.$$

(Programme, voir U44.) Les dérivées de ces fonctions sont calculées au moyen de la formule

$$\partial_v(\tilde{u} \circ L^{-1})\ (P) = \partial_{\ell^{-1}(v)}\ \tilde{u}\ (L^{-1} P)$$

où $v \in \mathbb{R}^3$, $P \in S$ et ℓ est la partie linéaire de l'application affine L. (Programme, voir DU44.)

On considère un isomorphisme d'espaces vectoriels

$$Q\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^{44}$$

dont la matrice

$$[Q] = (Q(u_1),\ldots,Q(u_{44}))$$

est appelée matrice d'interpolation de l'élément générique élargi. Cette matrice est de la forme

$$
[Q] = \begin{pmatrix}
1 & & & & & & & & & \\
& D_1^{-1} & & & & & & & & \\
& & 1 & & & & & 0 & & \\
& & & D_2^{-1} & & & & & & \\
& & & & 1 & & & & & \\
& & & & & D_3^{-1} & & & & \\
& & & & & & 1 & & & \\
& & & & & & & D_4^{-1} & & \\
& & & Q_1 & & & & & D_5^{-1} & \\
& & & & Q_2 & & & & & D_6^{-1} \\
& & & & & Q_3 & & & & & D_7^{-1}
\end{pmatrix}
$$

où D_1, D_2, D_3, D_4 sont des matrices 3×3,

D_5 et D_7 sont des matrices diagonales 12×12,

D_6 est diagonale 4×4,

Q_1 est une matrice 12×16,

Q_2 est une matrice 4×28

et Q_3 est une matrice 12×32.

(Construction, voir 6.3. Programme, initialisation de $D_1, \ldots, D_7$ voir ELEM1; initialisation de Q_1, Q_2, Q_3 voir ELEM2; résolution de $[Q]s = c$, voir FE2P44.)

8.1-3. <u>L'élément fini, variante I-C.</u>

La solution V^I est un sous-espace linéaire de dimension 16 de U. A l'aide d'une application linéaire $E_1 : \mathbb{R}^{16} \longrightarrow \mathbb{R}^{28}$, nous définissons

$$V^I = \{v \in U;\quad \exists c \in \mathbb{R}^{16}\quad Qv = \begin{bmatrix} c \\ E_1\, c \end{bmatrix}\}$$

$$= \text{image de } T$$

où $$T := Q^{-1} \begin{bmatrix} I_{16} \\ E_1 \end{bmatrix} : \mathbb{R}^{16} \longrightarrow U.$$

(Construction, voir 2.8 et 6.4.)

Le problème d'interpolation 1.2-(iii).

Pour 16 nombres réels donnés $c_1,\ldots,c_{16}$, trouver $v \in V^I$ tel que

$$v(A_i) = c_{4i-3}\,,\qquad \partial_x\, v(A_i) = c_{4i-2}\,,$$

$$\partial_y\, v(A_i) = c_{4i-1}\,,\qquad \partial_z\, v(A_i) = c_{4i}\,,$$

$$i = 1(1)4.$$

La solution s'exprime dans la base de U

$$v = \sum_{j=1}^{44} s_j\, u_j\ .$$

Les coefficients $s_1,\ldots,s_{44}$ sont obtenus en résolvant le système d'équations linéaires

$$[Q]s = \begin{bmatrix} c \\ E_1\, c \end{bmatrix}.$$

(Programme; calcul de s voir FE2P16; évaluation de v, voir FINT; évaluation des dérivées directionnelles de v, voir DFINT.)

La base d'Hermite.

La base d'Hermite de V^I

$$\{v_i : S \longrightarrow \mathbb{R};\quad i = 1(1)16\}$$

est définie par les relations $v_i \in V^I$,

$$v_i(A_j) = \delta_{i,4j-3} \qquad \partial_x v_i(A_j) = \delta_{i,4j-2}$$

$$\partial_y v_i(A_j) = \delta_{i,4j-1} \qquad \partial_z v_i(A_j) = \delta_{i,4j}$$

$j = 1(1)4, \quad i = 1(1)16.$

Ces fonctions s'expriment dans la base de U

$$v_i = \sum_{j=1}^{44} t_{ji} u_j , \quad i = 1(1)16,$$

$$\text{où} \quad (t_{ji}) = [T] = [Q]^{-1} \begin{bmatrix} I_{16} \\ E_1 \end{bmatrix} .$$

(Programme; initialisation de $[T]$, voir ELEM3; évaluation de v_i , $i = 1(1)16$, voir HERM; évaluation des dérivées directionnelles de v_i , $i = 1(1)16$, voir DHERM.)

8.2. Mode d'emploi du programme.

8.2-1. Les subroutines DECOMP et SOLVE.

Le programme 8.3 doit être complété à l'aide des deux subroutines suivantes. La

```
SUBROUTINE DECOMP (NX,NN,A,SC,IPS,D)
```

effectue la décomposition de Gauss de la matrice A, avec choix du pivot par lignes.

Entrées: NX dimension déclarée de la matrice A(NX,NX).

NN nombre de lignes de A.

A matrice carrée à décomposer.

Sorties: A matrice sous forme factorisée.

IPS vecteur contenant la nouvelle numérotation des lignes de A, consécutive au choix des pivots.

D déterminant de A.

SC est un vecteur de travail.

La

SUBROUTINE SOLVE (NX,NN,A,B,X,IPS)

résoud le système d'équations linéaires A*X = B où A est sous la forme décomposée de Gauss.

Entrées: NX dimension déclarée de A(NX,NX).

NN nombre de lignes de A.

A matrice carrée sous forme factorisée.

B membre de droite de l'équation.

IPS vecteur contenant la nouvelle numérotation des lignes de A, consécutive au choix des pivots.

Sortie: X solution de l'équation.

8.2-2. Le problème d'interpolation linéaire.

Afin d'éviter des calculs inutiles, nous organisons le travail selon trois cycles imbriqués.

Le cycle extérieur porte sur les tétraèdres. Chaque fois que l'on considère un nouveau tétraèdre, on doit appeler les subroutines

ELEMØ (X1,Y1,Z1, X2,Y2,Z2, X3,Y3,Z3, X4,Y4,Z4)

ELEM1

ELEM2

où (X1,Y1,Z1), (X2,Y2,Z2), (X3,Y3,Z3), (X4,Y4,Z4) sont les sommets du tétraèdre considéré.

Le cycle intermédiaire porte sur les valeurs des paramètres. Chaque fois que l'on considère une nouvelle fonction d'interpo-

lation, on doit appeler la subroutine

FE2P16(C,S)

où C et S sont déclarés en dimension C(44) et S(44). A l'entrée, C(1),...,C(16) contiennent les valeurs des paramètres de l'élément, dans l'ordre suivant

$v(X1,Y1,Z1)$

$\partial_x\, v(X1,Y1,Z1)$

$\partial_y\, v(X1,Y1,Z1)$

$\partial_z\, v(X1,Y1,Z1)$

$v(X2,Y2,Z2)$

... ...

$\partial_z\, v(X4,Y4,Z4)$.

A la sortie, S(1),...,S(44) contiennent les coefficients de la fonction d'interpolation correspondante $v \in V^I$ par rapport à la base $\{u_1,\dots,u_{44}\}$ de U (voir 8.1-2).

Le <u>cycle intérieur</u> porte sur les points du tétraèdre. Chaque fois que l'on veut évaluer la fonction v en un point (PX,PY,PZ) du tétraèdre, on appelle la fonction

FINT(PX,PY,PZ,S).

Chaque fois que l'on désire calculer la dérivée de v dans la direction (TX,TY,TZ) au point (PX,PY,PZ), on appelle la fonction

DFINT(TX,TY,TZ, PX,PY,PZ,S).

<u>Remarque.</u>

Une partie des communications entre les sous-programmes se fait au moyen d'un bloc commun nommé TETRAS. Ce bloc commun ne dépend

que du tétraèdre considéré. Il est initialisé par les subroutines ELEMØ, ELEM1 et ELEM2. Il est utilisé par FE2P16, FINT et DFINT.

8.2-3. La base d'Hermite

Ce calcul est organisé selon deux cycles imbriqués.

Le cycle extérieur porte sur les tétraèdres. Chaque fois que l'on considère un nouveau tétraèdre, on doit appeler les subroutines

ELEMØ(X1,Y1,Z1, X2,Y2,Z2, X3,Y3,Z3, X4,Y4,Z4)

ELEM1

ELEM2

ELEM3

où (X1,Y1,Z1), (X2,Y2,Z2), (X3,Y3,Z3), (X4,Y4,Z4) sont les sommets du tétraèdre.

Le cycle intérieur porte sur les points du tétraèdre. Chaque fois que l'on veut calculer la base d'Hermite en un point (PX,PY,PZ) du tétraèdre, on appelle la subroutine

HERM(PX,PY,PZ, V)

où V est déclaré en dimension 16. A la sortie, V(1),...,V(16) contiennent les valeurs v_1(PX,PY,PZ),...,v_{16}(PX,PY,PZ). Chaque fois que l'on désire évaluer la dérivée des fonctions $v_1,\dots,v_{16}$ dans la direction (TX,TY,TZ) au point (PX,PY,PZ), on appelle la subroutine

DHERM(TX,TY,TZ, PX,PY,PZ, DV)

où DV est déclaré en dimension 16. A la sortie, DV(1),...,DV(16) contiennent les valeurs des dérivées directionnelles

$\partial_t v_1(P),\ldots,\partial_t v_{16}(P)$ où t:= (TX,TY,TZ) et P:= (PX,PY,PZ).

Remarque.

Une partie des communications entre les sous-programmes se fait au moyen d'un bloc commun nommé TETRAS. Ce bloc commun ne dépend que du tétraèdre considéré. Il est initialisé par les subroutines ELEMØ, ELEM1 , ELEM2 et ELEM3. Il est utilisé par HERM et DHERM.

8.3. Le programme FORTRAN.

Le programme suivant comprend 1124 cartes, imprimées à raison de 60 lignes par page.

```
C***********************************************************************
C***********************************************************************
C***********************************************************************
C****                                                               ****
C****                                                               ****
C****     E L E M E N T    F I N I    T E T R A E D R I Q U E       ****
C****                                                               ****
C****     DE CLASSE C1,   DE DEGRE DEUX,   A SEIZE PARAMETRES.      ****
C****                                                               ****
C****                                                               ****
C****     VARIANTE I-C.                            MARCEL DELEZE    ****
C****                                              INST. DE MATH.   ****
C****                                              UNIVERSITE       ****
C****                                              1700 FRIBOURG    ****
C****     FEVRIER 1978.                            SWITZERLAND      ****
C****                                                               ****
C***********************************************************************
C***********************************************************************
C-----------------------------------------------------------------------
C
```

Les programmes ont été numérisés sous la forme de fichiers textes :

http://www.deleze.name/~marcel//maths/FORTRAN/index.html

```
      RETURN
   11 PT1=X*W*(W+0.5*(Y+Z))
      RETURN
      END
C-----------------------------------------------------------------------
C
      FUNCTION WT11 (WT,XT,YT,ZT)
C
C-----------------------------------------------------------------------
C**** BASE D'INTERPOLATION DE L'ELEMENT DE REFERENCE.
C**** VALEUR DU POLYNOME PAR MORCEAUX WT(1,1) AU POINT (XT,YT,ZT).
C**** WT EST INACTIF.
      X=XT
      Y=YT
      Z=ZT
      IF (X.GE.Y .AND. Z.GE.Y) GO TO 20
      IF (X.GE.Z .AND. Y.GE.Z) GO TO 30
C**** MORCEAU 1.
      WT11=X*( 2.*X*X/3.-X*Y-X*Z+2.*Y*Z )
      RETURN
C**** MORCEAU 2.
   20 WT11=Y*Y*( Z-Y/3. )
      RETURN
C**** MORCEAU 3.
   30 WT11=Z*Z*( Y-Z/3. )
      RETURN
      END
C-----------------------------------------------------------------------
```

```
C
      FUNCTION ST10 (WT,XT,YT,ZT)
C
C-----------------------------------------------------------------------
C**** BASE D'INTERPOLATION DE L'ELEMENT DE REFERENCE.
C**** VALEUR DE LA FONCTION RATIONNELLE RT(1,0), RESTREINTE AU
C**** MORCEAU 1, AU POINT (XT,YT,ZT).   WT=1.-XT-YT-ZT.
C**** NOUS SUPPOSONS QUE LE POINT (XT,YT,ZT) NE SOIT PAS SITUE SUR
C**** UNE DES CINQ ARETES DU MORCEAU 1 APPARTENANT AU BORD DU TETRAEDRE.
      DATA EPS/0.5E-06/
      W=WT
      X=XT
      Y=YT
      Z=ZT
      YMX=Y-X
      ZMX=Z-X
      IF (YMX.GT.EPS .OR. ZMX.GT.EPS) GO TO 10
C**** SUR LA DROITE X=Y=Z, ON A
      ST10=3.*X*X*W
      RETURN
   10 CONTINUE
C**** DANS LE RESTE DU MORCEAU 1, ON A
      VAR=-X*W*( 3./(1.-3.*X) + 2./(Y+ZMX) )
      VAR=-YMX*ZMX*( 6.*X-2.*W-3.+VAR )
      VAR=VAR*( ZMX/(Y*(W+YMX))+YMX/(Z*(W+ZMX)) )/(YMX+ZMX)
      VAR=W*( 2.*(YMX+ZMX)+VAR )/((1.-3.*X)*(Y+ZMX))
      ST10=X*X*W*(3.+VAR)
      RETURN
      END
C-----------------------------------------------------------------------
C
      FUNCTION RT10 (WT,XT,YT,ZT)
C
C-----------------------------------------------------------------------
C**** BASE D'INTERPOLATION DE L'ELEMENT DE REFERENCE.
C**** VALEUR DE LA FONCTION RATIONNELLE PAR MORCEAUX RT(1,0) AU POINT
C**** (XT,YT,ZT) DU TETRAEDRE DE REFERENCE.   WT=1.-XT-YT-ZT.
      DATA EPS/0.5E-06/
      W=WT
      X=XT
      Y=YT
      Z=ZT
      IF (X.GT.EPS .AND. Y.GT.EPS .AND.
     1    Z.GT.EPS .AND. W.GT.EPS ) GO TO 50
C**** SUR LE BORD DU TETRAEDRE, ON A
      RT10=0.0
      RETURN
   50 CONTINUE
C**** A L'INTERIEUR DU TETRAEDRE, ON A
      IF (X.GT.Y .AND. Z.GE.Y) GO TO 200
      IF (X.GE.Z .AND. Y.GE.Z) GO TO 300
  100 CONTINUE
C**** MORCEAU 1.
      RT10=ST10(W,X,Y,Z)
      RETURN
  200 CONTINUE
C**** MORCEAU 2.
      CH=X
      X=Y
      Y=CH
```

```
      GO TO 100
  300 CONTINUE
C**** MORCEAU 3.
      CH=X
      X=Z
      Z=CH
      GO TO 100
      END
C-----------------------------------------------------------------------
C
      FUNCTION ST13 (WT,XT,YT,ZT)
C
C-----------------------------------------------------------------------
C**** BASE D'INTERPOLATION DE L'ELEMENT DE REFERENCE.
C**** VALEUR DE LA FONCTION RATIONNELLE RT(1,3), RESTREINTE AU
C**** MORCEAU 1, AU POINT (XT,YT,ZT).   WT=1.-XT-YT-ZT.
C**** NOUS SUPPOSONS QUE LE POINT (XT,YT,ZT) NE SOIT PAS SITUE SUR
C**** UNE DES CINQ ARETES DU MORCEAU 1 APPARTENANT AU BORD DU TETRAEDRE.
      DATA EPS/0.5E-06/
      W=WT
      X=XT
      Y=YT
      Z=ZT
      YMX=Y-X
      ZMX=Z-X
      IF (YMX.GT.EPS .OR. ZMX.GT.EPS) GO TO 10
C**** SUR LA DROITE X=Y=Z, ON A
      ST13=0.0
      RETURN
   10 CONTINUE
C**** DANS LE RESTE DU MORCEAU 1, ON A
      VAR=1./(1.-3.*X) - 1./(W+Y)
      VAR=-4.*X + 2.*Z + X*ZMX*VAR
      VAR=W*YMX*VAR /( Y*(YMX+ZMX)*(W+YMX)*(W+Y)*(1.-3.*X) )
      VAR=VAR + 2./( (W+X)*(W+ZMX) )
      ST13=2.*X*X*ZMX*ZMX*W*VAR
      RETURN
      END
C-----------------------------------------------------------------------
C
      FUNCTION RT13 (WT,XT,YT,ZT)
C
C-----------------------------------------------------------------------
C**** BASE D'INTERPOLATION DE L'ELEMENT DE REFERENCE.
C**** VALEUR DE LA FONCTION RATIONNELLE PAR MORCEAUX RT(1,3) AU
C**** POINT (XT,YT,ZT).   WT=1.-XT-YT-ZT.
      DATA EPS/0.5E-06/
      W=WT
      X=XT
      Y=YT
      Z=ZT
      IF (X.GE.Z .AND. Y.GE.Z) GO TO 300
      IF (X.GT.EPS .AND. Y.GT.EPS .AND.
     1    Z.GT.EPS .AND. W.GT.EPS ) GO TO 50
C**** SUR LE BORD DU TETRAEDRE, ON A
      RT13=0.0
      RETURN
   50 CONTINUE
C**** A L'INTERIEUR DU TETRAEDRE, ON A
      IF (X.GE.Y .AND. Z.GE.Y) GO TO 200
```

```
  100 CONTINUE
C**** MORCEAU 1.
      RT13=ST13(W,X,Y,Z)
      RETURN
  200 CONTINUE
C**** MORCEAU 2.
      CH=X
      X=Y
      Y=CH
      GO TO 100
  300 CONTINUE
C**** MORCEAU 3.
      RT13=0.0
      RETURN
      END
C-----------------------------------------------------------------------
C
      SUBROUTINE UT44 (NFCT, XT,YT,ZT, UT)
C
C-----------------------------------------------------------------------
C**** BASE D'INTERPOLATION DE L'ELEMENT DE REFERENCE.
C**** VALEUR DE UT(1), ... , UT(NFCT) AU POINT (XT,YT,ZT) DU TETRAEDRE
C**** DE REFERENCE.
C**** NFCT PEUT PRENDRE LES VALEURS 16, 28, 32 OU 44.
      DIMENSION UT(44)
      N=NFCT
      X=XT
      Y=YT
      Z=ZT
      W=1.-X-Y-Z
      DO 20 I=1,4
C****    BLOC 1.   FONCTIONS NUMERO 1 A 16.
         IND=4*I - 3
         UT(IND  )=PT1(0,W,X,Y,Z)
         UT(IND+1)=PT1(1,W,X,Y,Z)
         UT(IND+2)=PT1(1,W,Y,Z,X)
         UT(IND+3)=PT1(1,W,Z,X,Y)
         IF (N.LE.16) GO TO 10
C****    BLOC 2.   FONCTIONS NUMERO 17 A 28.
         IND=3*I+14
         UT(IND  )=WT11(W,X,Y,Z)
         UT(IND+1)=WT11(W,Y,Z,X)
         UT(IND+2)=WT11(W,Z,X,Y)
         IF (N.LE.28) GO TO 10
C****    BLOC 3.   FONCTIONS NUMERO 29 A 32.
         UT(I+28 )=RT10(W,X,Y,Z)
         IF (N.LE.32) GO TO 10
C****    BLOC 4.   FONCTIONS NUMERO 33 A 44.
         IND=3*I+30
         UT(IND  )=RT13(W,Y,Z,X)
         UT(IND+1)=RT13(W,Z,X,Y)
         UT(IND+2)=RT13(W,X,Y,Z)
   10    CH=W
         W=X
         X=Y
         Y=Z
         Z=CH
   20 CONTINUE
      RETURN
      END
```

```
C-----------------------------------------------------------------------
C
      FUNCTION DPT1 (J, TX,TY,TZ, WT,XT,YT,ZT)
C
C-----------------------------------------------------------------------
C**** BASE D'INTERPOLATION DE L'ELEMENT DE REFERENCE.
C**** DERIVEE DU POLYNOME DE DEGRE TROIS PT(1,J) DANS LA DIRECTION
C**** (TX,TY,TZ) AU POINT (XT,YT,ZT).
C**** J PEUT PRENDRE LES VALEURS Ø OU 1. WT=1.-XT-YT-ZT.
      W=WT
      X=XT
      Y=YT
      Z=ZT
      T1=TX
      T2=TY
      T3=TZ
      TØ=-T1-T2-T3
      IF (J) 1Ø,1Ø,11
   1Ø P=2.-W    -2.*(X*X+Y*Y+Z*Z+X*Y+Y*Z+Z*X)
      DP =-TØ - 2.*( T1*(2.*X+Y+Z)+T2*(2.*Y+Z+X)+T3*(2.*Z+X+Y) )
      GO TO 2Ø
   11 P=X*(W+Ø.5*(Y+Z))
      DP =TØ*X + T1*(W+Ø.5*(Y+Z)) + (T2+T3)*Ø.5*X
   2Ø DPT1=TØ*P + W*DP
      RETURN
      END
C-----------------------------------------------------------------------
C
      FUNCTION DWT11 (TX,TY,TZ, WT,XT,YT,ZT)
C
C-----------------------------------------------------------------------
C**** BASE D'INTERPOLATION DE L'ELEMENT DE REFERENCE.
C**** DERIVEE DU POLYNOME PAR MORCEAUX WT(1,1) DANS LA DIRECTION
C**** (TX,TY,TZ) AU POINT (XT,YT,ZT).
C**** WT EST INACTIF.
      X=XT
      Y=YT
      Z=ZT
      IF (X.GE.Y .AND. Z.GE.Y) GO TO 2Ø
      IF (X.GE.Z .AND. Y.GE.Z) GO TO 3Ø
C**** MORCEAU 1.
      DWT11=2.*TX*(X*(X-Y-Z)+Y*Z) + X*(TY*(2.*Z-X)+TZ*(2.*Y-X))
      RETURN
C**** MORCEAU 2.
   2Ø DWT11=Y*(TY*(2.*Z-Y) + TZ*Y)
      RETURN
C**** MORCEAU 3.
   3Ø DWT11=Z*(TY*Z + TZ*(2.*Y-Z))
      RETURN
      END
C-----------------------------------------------------------------------
C
      FUNCTION DST1Ø (TX,TY,TZ, WT,XT,YT,ZT)
C
C-----------------------------------------------------------------------
C**** BASE D'INTERPOLATION DE L'ELEMENT DE REFERENCE.
C**** DERIVEE DE LA FONCTION RATIONNELLE RT(1,Ø), RESTREINTE AU
C**** MORCEAU 1, DANS LA DIRECTION (TX,TY,TZ) AU POINT (XT,YT,ZT).
C**** WT=1.-XT-YT-ZT.
C**** NOUS SUPPOSONS QUE LE POINT (XT,YT,ZT) NE SOIT PAS SITUE SUR
```

```
C**** UNE DES CINQ ARETES DU MORCEAU 1 APPARTENANT AU BORD DU TETRAEDRE.
      DATA EPS/0.5E-06/
      W=WT
      X=XT
      Y=YT
      Z=ZT
      YMX=Y-X
      ZMX=Z-X
      T1=TX
      T2=TY
      T3=TZ
      T0=-T1-T2-T3
      IF (YMX.GT.EPS .OR. ZMX.GT.EPS) GO TO 10
C**** SUR LA DROITE X=Y=Z, LA VALEUR ET LA DERIVEE DE C SONT NULLES.
      V1=0.0
      DV1=0.0
      GO TO 20
   10 CONTINUE
C**** DANS LE RESTE DU MORCEAU 1, ON A
C**** VALEUR ET DERIVEE DE A (PLACEES DANS V1, DV1).
      P   =X*W
      DP  =T1*W + T0*X
      V1  =-P*( 3./(1.-3.*X) + 2./(Y+ZMX) )
      DV1=-3.*(DP - P*( -3.*T1/(1.-3.*X) ))/(1.-3.*X)
     1     -2.*(DP - P*( (T2+T3-T1)/(Y+ZMX) ))/(Y+ZMX)
C**** VALEUR ET DERIVEE DE B (PLACEES DANS V2,DV2).
      P   =6.*X-2.*W-3.+V1
      V2  =-YMX*ZMX*P
      DV2=-((T2-T1)*ZMX+YMX*(T3-T1))*P - YMX*ZMX*(6.*T1-2.*T0+DV1)
C**** VALEUR ET DERIVEE DE C (PLACEES DANS V1, DV1).
      P   =ZMX*V2
      DP  =(T3-T1)*V2 + ZMX*DV2
      Q   =(YMX+ZMX)*Y*(W+YMX)
      V1  =P/Q
      DV1=(DP - P*( (T2+T3-2.*T1)/(YMX+ZMX)+T2/Y+(T0+T2-T1)/(W+YMX) ))/Q
      P   =YMX*V2
      DP  =(T2-T1)*V2 + YMX*DV2
      Q   =(YMX+ZMX)*Z*(W+ZMX)
      V1  =V1 + P/Q
      DV1=DV1 + (DP - P*( (T2+T3-2.*T1)/(YMX+ZMX)+T3/Z
     1                   +(T0+T3-T1)/(W+ZMX) ))/Q
   20 CONTINUE
C**** VALEUR ET DERIVEE DE D (PLACEES DANS V2, DV2).
      P   =W*( 2.*(YMX+ZMX)+V1 )
      DP  =T0*( 2.*(YMX+ZMX)+V1 ) + W*( 2.*(T2+T3-2.*T1)+DV1 )
      Q   =(1.-3.*X)*(Y+ZMX)
      V2  =P/Q
      DV2=(DP - P*( -3.*T1/(1.-3.*X)+(T2+T3-T1)/(Y+ZMX) ))/Q
C**** DERIVEE DE RT(1,0).
      DST10=X*( (T1*2.*W+X*T0)*(3.+V2) + X*W*DV2 )
      RETURN
      END
C-----------------------------------------------------------------------
C
      FUNCTION DRT10 (TX,TY,TZ, WT,XT,YT,ZT)
C
C-----------------------------------------------------------------------
C**** BASE D'INTERPOLATION DE L'ELEMENT DE REFERENCE.
C**** DERIVEE DE LA FONCTION RATIONNELLE PAR MORCEAUX RT(1,0) DANS
C**** LA DIRECTION (TX,TY,TZ) AU POINT (XT,YT,ZT).   WT=1.-XT-YT-ZT.
```

```
      DATA EPS/0.5E-06/
      W=WT
      X=XT
      Y=YT
      Z=ZT
      IF (X.GT.EPS .AND. Y.GT.EPS .AND. Z.GT.EPS) GO TO 50
C**** DANS LES FACES 2, 3 ET 4, ON A
      DRT10=0.0
      RETURN
   50 CONTINUE
      T1=TX
      T2=TY
      T3=TZ
      IF (X.GE.Y .AND. Z.GE.Y) GO TO 200
      IF (X.GE.Z .AND. Y.GE.Z) GO TO 300
  100 CONTINUE
C**** MORCEAU 1.
      IF (W.GT.EPS) GO TO 150
C**** DANS L'INTERSECTION DU MORCEAU 1 ET DE LA FACE 1, ON A
      DRT10= (-T1-T2-T3)*3.*X*X
      RETURN
  150 CONTINUE
C**** DANS L'INTERSECTION DU MORCEAU 1 ET DE L'INTERIEUR DU TETRAEDRE,
C**** ON A
      DRT10=DST10(T1,T2,T3,W,X,Y,Z)
      RETURN
  200 CONTINUE
C**** MORCEAU 2.
      CH=X
      X=Y
      Y=CH
      CH=T1
      T1=T2
      T2=CH
      GO TO 100
  300 CONTINUE
C**** MORCEAU 3.
      CH=X
      X=Z
      Z=CH
      CH=T1
      T1=T3
      T3=CH
      GO TO 100
      END
C-----------------------------------------------------------------------
C
      FUNCTION DST13 (TX,TY,TZ, WT,XT,YT,ZT)
C
C-----------------------------------------------------------------------
C**** BASE D'INTERPOLATION DE L'ELEMENT DE REFERENCE.
C**** DERIVEE DE LA FONCTION RATIONNELLE RT(1,3), RESTREINTE AU
C**** MORCEAU 1, DANS LA DIRECTION (TX,TY,TZ) AU POINT (XT,YT,ZT).
C**** WT=1.-XT-YT-ZT.
C**** NOUS SUPPOSONS QUE LE POINT (XT,YT,ZT) NE SOIT PAS SITUE SUR
C**** UNE DES CINQ ARETES DU MORCEAU 1 APPARTENANT AU BORD DU TETRAEDRE.
      DATA EPS/0.5E-06/
      W=WT
      X=XT
      Y=YT
```

```
      Z=ZT
      YMX=Y-X
      ZMX=Z-X
      IF (YMX.GT.EPS .OR. ZMX.GT.EPS) GO TO 10
C**** SUR LA DROITE X=Y=Z, ON A
      DST13=0.0
      RETURN
   10 CONTINUE
C**** DANS LE RESTE DU MORCEAU 1, ON A
      T1=TX
      T2=TY
      T3=TZ
      T0=-T1-T2-T3
C**** VALEUR ET DERIVEE DE E.
      P =X*ZMX
      DP=T1*ZMX + X*(T3-T1)
      Q =1.-3.*X
      E =P/Q
      DE=(DP - E*(-3.*T1))/Q
      Q =W+Y
      E =-4.*X+2.*Z + E - P/Q
      DE=-4.*T1+2.*T3 + DE - ( DP - P*(T0+T2)/Q )/Q
C**** VALEUR ET DERIVEE DE F.
      P =W*YMX*E
      DP=T0*YMX*E + W*(T2-T1)*E + W*YMX*DE
      Q =Y*(YMX+ZMX)*(W+YMX)*(W+Y)*(1.-3.*X)
      F =P/Q
      DF=(DP - P*( T2/Y+(T2+T3-2.*T1)/(YMX+ZMX)+(T0+T2-T1)/(W+YMX)
     1            +(T0+T2)/(W+Y)-3.*T1/(1.-3.*X) ))/Q
      Q =(W+X)*(W+ZMX)
      F =F + 2./Q
      DF=DF - 2.*( (T0+T1)/(W+X)+(T0+T3-T1)/(W+ZMX) )/Q
C**** DERIVEE DE DST13.
      DST13=2.*X*ZMX*( 2.*(T1*ZMX+X*(T3-T1))*W*F + X*ZMX*(T0*F+W*DF) )
      RETURN
      END
C-----------------------------------------------------------------------
C
      FUNCTION DRT13 (TX,TY,TZ, WT,XT,YT,ZT)
C
C-----------------------------------------------------------------------
C**** BASE D'INTERPOLATION DE L'ELEMENT DE REFERENCE.
C**** DERIVEE DE LA FONCTION RATIONNELLE PAR MORCEAUX RT(1,3) DANS
C**** LA DIRECTION (TX,TY,TZ) AU POINT (XT,YT,ZT).   WT=1.-XT-YT-ZT.
      DATA EPS/0.5E-06/
      W=WT
      X=XT
      Y=YT
      Z=ZT
      IF (X.GE.Z .AND. Y.GE.Z) GO TO 300
      IF (X.GT.EPS .AND. Y.GT.EPS .AND. Z.GT.EPS) GO TO 50
C**** DANS LES FACES 2, 3 ET 4, ON A
      DRT13=0.0
      RETURN
   50 CONTINUE
      T1=TX
      T2=TY
      T3=TZ
      IF (X.GE.Y .AND. Z.GE.Y) GO TO 200
  100 CONTINUE
```

```
C**** MORCEAU 1.
      IF (W.GT.EPS) GO TO 150
C**** DANS L'INTERSECTION DU MORCEAU 1 ET DE LA FACE 1, ON A
      DRT13=4.*(-T1-T2-T3)*X*(Z-X)
      RETURN
  150 CONTINUE
C**** DANS L'INTERSECTION DU MORCEAU 1 ET DE L'INTERIEUR DU TETRAEDRE,
C**** ON A
      DRT13=DST13(T1,T2,T3,W,X,Y,Z)
      RETURN
  200 CONTINUE
C**** MORCEAU 2.
      CH=X
      X=Y
      Y=CH
      CH=T1
      T1=T2
      T2=CH
      GO TO 100
  300 CONTINUE
C**** MORCEAU 3.
      DRT13=0.0
      RETURN
      END
C-----------------------------------------------------------------------
C
      SUBROUTINE DUT44 (NFCT, TX,TY,TZ, XT,YT,ZT, DUT)
C
C-----------------------------------------------------------------------
C**** BASE D'INTERPOLATION DE L'ELEMENT DE REFERENCE.
C**** DERIVEE DE UT(1), ... , UT(NFCT) DANS LA DIRECTION (TX,TY,TZ)
C**** AU POINT (XT,YT,ZT).
C**** NFCT PEUT PRENDRE LES VALEURS 16, 28, 32 OU 44.
      DIMENSION DUT(44)
      N=NFCT
      T1=TX
      T2=TY
      T3=TZ
      T0=-T1-T2-T3
      X=XT
      Y=YT
      Z=ZT
      W=1.-X-Y-Z
      DO 20 I=1,4
C****    BLOC 1.   FONCTIONS NUMERO 1 A 16.
         IND=4*I-3
         DUT(IND  )=DPT1(0,T1,T2,T3,W,X,Y,Z)
         DUT(IND+1)=DPT1(1,T1,T2,T3,W,X,Y,Z)
         DUT(IND+2)=DPT1(1,T2,T3,T1,W,Y,Z,X)
         DUT(IND+3)=DPT1(1,T3,T1,T2,W,Z,X,Y)
         IF (N.LE.16) GO TO 10
C****    BLOC 2.   FONCTIONS NUMERO 17 A 28.
         IND=3*I+14
         DUT(IND  )=DWT11(T1,T2,T3,W,X,Y,Z)
         DUT(IND+1)=DWT11(T2,T3,T1,W,Y,Z,X)
         DUT(IND+2)=DWT11(T3,T1,T2,W,Z,X,Y)
         IF (N.LE.28) GO TO 10
C****    BLOC 3.   FONCTIONS NUMERO 29 A 32.
         DUT(I+28 )=DRT10(T1,T2,T3,W,X,Y,Z)
         IF (N.LE.32) GO TO 10
```

```
C****     BLOC 4.   FONCTIONS NUMERO 33 A 44.
          IND=3*I+30
          DUT(IND  )=DRT13(T2,T3,T1,W,Y,Z,X)
          DUT(IND+1)=DRT13(T3,T1,T2,W,Z,X,Y)
          DUT(IND+2)=DRT13(T1,T2,T3,W,X,Y,Z)
   10     CH=W
          W=X
          X=Y
          Y=Z
          Z=CH
          CH=T0
          T0=T1
          T1=T2
          T2=T3
          T3=CH
   20 CONTINUE
      RETURN
      END
C-----------------------------------------------------------------------
C
      SUBROUTINE ELEM0 (X1,Y1,Z1, X2,Y2,Z2, X3,Y3,Z3, X4,Y4,Z4)
C
C-----------------------------------------------------------------------
C**** ELEMENT GENERIQUE ELARGI.
C**** INITIALISATIONS RELATIVES AU TETRAEDRE GENERIQUE.
C**** ENTREES  :  (X1,Y1,Z1), (X2,Y2,Z2), (X3,Y3,Z3), (X4,Y4,Z4) SOMMETS
C****                    DU TETRAEDRE GENERIQUE.
C**** SORTIES  :  TETRAS BLOC COMMUN PAR LEQUEL SE FONT LES SORTIES.
C****             LL     PARTIE LINEAIRE DE L'APPLICATION AFFINE L,
C****                    FACTORISEE SELON LA METHODE DE GAUSS.
C****             IPERM  VECTEUR CONTENANT LA NOUVELLE NUMEROTATION DES
C****                    LIGNES DE LL, CONSECUTIVE AU CHOIX DES PIVOTS.
C****             MX(I), MY(I), MZ(I), VECTEUR NORMAL A LA I-EME FACE DU
C****                    TETRAEDRE, I=1(1)4.
C****             NX(I,J), NY(I,J), NZ(I,J), J=1,2,3, VECTEURS PARAL-
C****                    LELES A LA I-EME FACE ET NORMAUX AUX ARETES DU
C****                    TETRAEDRE, I=1(1)4.
      REAL LL, MX,MY,MZ, NX,NY,NZ
      COMMON /TETRAS/ X(4),Y(4),Z(4),
     1         NX(4,3),NY(4,3),NZ(4,3), MX(4),MY(4),MZ(4),
     2         D(4,3,3),D5(12),D6(4),D7(12), Q1(12,16),Q2(4,28),Q3(12,32),
     3         T(44,16), LL(3,3),IPERM(3)
      DIMENSION AUX(3)
      X(1)=X1
      Y(1)=Y1
      Z(1)=Z1
      X(2)=X2
      Y(2)=Y2
      Z(2)=Z2
      X(3)=X3
      Y(3)=Y3
      Z(3)=Z3
      X(4)=X4
      Y(4)=Y4
      Z(4)=Z4
C**** PARTIE LINEAIRE DE L'APPLICATION AFFINE L.
      LL(1,1)=X(2)-X(1)
      LL(2,1)=Y(2)-Y(1)
      LL(3,1)=Z(2)-Z(1)
      LL(1,2)=X(3)-X(1)
```

```
      LL(2,2)=Y(3)-Y(1)
      LL(3,2)=Z(3)-Z(1)
      LL(1,3)=X(4)-X(1)
      LL(2,3)=Y(4)-Y(1)
      LL(3,3)=Z(4)-Z(1)
C**** FACTORISATION DE LL.
      CALL DECOMP(3,3,LL,AUX,IPERM,DET)
C**** VOL = ABS(DET)/6. EST LE VOLUME DU TETRAEDRE.
C**** SI LE TETRAEDRE EST DEGENERE (VOL=0.), LA SUBROUTINE DECOMP
C**** IMPRIME UN MESSAGE D'ERREUR.
      DO 10 I=1,4
         J=MOD(I,4)+1
         K=MOD(J,4)+1
         L=MOD(K,4)+1
C****    INITIALISATION DU VECTEUR (MX(I), MY(I), MZ(I)).
         MX(I)=(Y(K)-Y(J))*(Z(L)-Z(J)) - (Z(K)-Z(J))*(Y(L)-Y(J))
         MY(I)=(Z(K)-Z(J))*(X(L)-X(J)) - (X(K)-X(J))*(Z(L)-Z(J))
         MZ(I)=(X(K)-X(J))*(Y(L)-Y(J)) - (Y(K)-Y(J))*(X(L)-X(J))
         S=SQRT(MX(I)**2 + MY(I)**2 + MZ(I)**2)
         MX(I)=MX(I)/S
         MY(I)=MY(I)/S
         MZ(I)=MZ(I)/S
C****    VECTEURS  (NX(I,J), NY(I,J), NZ(I,J)), J=1,2,3.
         NX(I,1)=MY(I)*(Z(L)-Z(K)) - MZ(I)*(Y(L)-Y(K))
         NY(I,1)=MZ(I)*(X(L)-X(K)) - MX(I)*(Z(L)-Z(K))
         NZ(I,1)=MX(I)*(Y(L)-Y(K)) - MY(I)*(X(L)-X(K))
         S=SQRT(NX(I,1)**2+NY(I,1)**2+NZ(I,1)**2)
         NX(I,1)=NX(I,1)/S
         NY(I,1)=NY(I,1)/S
         NZ(I,1)=NZ(I,1)/S
         NX(I,2)=MY(I)*(Z(J)-Z(L)) - MZ(I)*(Y(J)-Y(L))
         NY(I,2)=MZ(I)*(X(J)-X(L)) - MX(I)*(Z(J)-Z(L))
         NZ(I,2)=MX(I)*(Y(J)-Y(L)) - MY(I)*(X(J)-X(L))
         S=SQRT(NX(I,2)**2+NY(I,2)**2+NZ(I,2)**2)
         NX(I,2)=NX(I,2)/S
         NY(I,2)=NY(I,2)/S
         NZ(I,2)=NZ(I,2)/S
         NX(I,3)=MY(I)*(Z(K)-Z(J)) - MZ(I)*(Y(K)-Y(J))
         NY(I,3)=MZ(I)*(X(K)-X(J)) - MX(I)*(Z(K)-Z(J))
         NZ(I,3)=MX(I)*(Y(K)-Y(J)) - MY(I)*(X(K)-X(J))
         S=SQRT(NX(I,3)**2+NY(I,3)**2+NZ(I,3)**2)
         NX(I,3)=NX(I,3)/S
         NY(I,3)=NY(I,3)/S
         NZ(I,3)=NZ(I,3)/S
   10 CONTINUE
      RETURN
      END
C-----------------------------------------------------------------------
C
      SUBROUTINE U44 (NFCT, PX,PY,PZ, U)
C
C-----------------------------------------------------------------------
C**** BASE D'INTERPOLATION DE L'ELEMENT GENERIQUE ELARGI.
C**** ENTREES  :  TETRAS BLOC COMMUN QUI DOIT AVOIR ETE PREALABLEMENT
C****                    INITIALISE A L'AIDE DE LA SUBROUTINE ELEM0.
C****             NFCT   PEUT PRENDRE LES VALEURS 16, 28, 32 OU 44.
C****             (PX, PY, PZ) UN POINT DU TETRAEDRE GENERIQUE.
C**** SORTIE   :  U(1), ..., U(NFCT) VALEURS DES NFCT PREMIERES FONC-
C****                    TIONS DE BASE AU POINT (PX, PY, PZ).
      REAL LL, MX,MY,MZ, NX,NY,NZ
```

```
      COMMON /TETRAS/ X(4),Y(4),Z(4),
     1        NX(4,3),NY(4,3),NZ(4,3), MX(4),MY(4),MZ(4),
     2        D(4,3,3),D5(12),D6(4),D7(12), Q1(12,16),Q2(4,28),Q3(12,32),
     3        T(44,16), LL(3,3),IPERM(3)
      DIMENSION U(44), GEN(3), REF(3)
      DATA NERR/0/,  EPS/-1.E-03/
      GEN(1)=PX-X(1)
      GEN(2)=PY-Y(1)
      GEN(3)=PZ-Z(1)
      CALL SOLVE(3,3,LL,GEN,REF,IPERM)
      XT=REF(1)
      YT=REF(2)
      ZT=REF(3)
      IF (XT.GT.EPS .AND. YT.GT.EPS .AND. ZT.GT.EPS .AND.
     1    1.-XT-YT-ZT.GT.EPS) GO TO 20
C**** LE POINT (PX,PY,PZ) EST A L'EXTERIEUR DU TETRAEDRE GENERIQUE.
      IF (NERR.LT.10) PRINT 10
   10 FORMAT(10X, 40H*** ERROR MESSAGE CALLED FROM U44    *** ,10X,
     1       33H THE POINT IS OUTSIDE THE ELEMENT   )
      NERR=NERR+1
   20 CONTINUE
C**** VALEURS DES FONCTIONS DE BASE.
      CALL UT44(NFCT,XT,YT,ZT,U)
      RETURN
      END
C-----------------------------------------------------------------------
C
      SUBROUTINE DU44 (NFCT, VX,VY,VZ, PX,PY,PZ, DU)
C
C-----------------------------------------------------------------------
C**** BASE D'INTERPOLATION DE L'ELEMENT GENERIQUE ELARGI.
C**** ENTREES  :  TETRAS BLOC COMMUN QUI DOIT AVOIR ETE PREALABLEMENT
C****                    INITIALISE A L'AIDE DE LA SUBROUTINE ELEM0.
C****             NFCT   PEUT PRENDRE LES VALEURS 16, 28, 32 OU 44.
C****             (VX, VY, VZ) UN VECTEUR.
C****             (PX, PY, PZ) UN POINT DU TETRAEDRE GENERIQUE.
C**** SORTIE   :  DU(1), ..., DU(NFCT) DERIVEES DES NFCT PREMIERES
C****                    FONCTIONS DE BASE DANS LA DIRECTION (VX,VY,VZ)
C****                    AU POINT (PX, PY, PZ).
      REAL LL, MX,MY,MZ, NX,NY,NZ
      COMMON /TETRAS/ X(4),Y(4),Z(4),
     1        NX(4,3),NY(4,3),NZ(4,3), MX(4),MY(4),MZ(4),
     2        D(4,3,3),D5(12),D6(4),D7(12), Q1(12,16),Q2(4,28),Q3(12,32),
     3        T(44,16), LL(3,3),IPERM(3)
      DIMENSION DU(44), GEN(3), REF(3)
      DATA NERR/0/,  EPS/-1.E-03/
      GEN(1)=VX
      GEN(2)=VY
      GEN(3)=VZ
      CALL SOLVE(3,3,LL,GEN,REF,IPERM)
      TX=REF(1)
      TY=REF(2)
      TZ=REF(3)
      GEN(1)=PX-X(1)
      GEN(2)=PY-Y(1)
      GEN(3)=PZ-Z(1)
      CALL SOLVE(3,3,LL,GEN,REF,IPERM)
      XT=REF(1)
      YT=REF(2)
      ZT=REF(3)
```

```
      IF (XT.GT.EPS .AND. YT.GT.EPS .AND. ZT.GT.EPS .AND.
     1    1.-XT-YT-ZT.GT.EPS) GO TO 20
C**** LE POINT (PX,PY,PZ) EST A L'EXTERIEUR DU TETRAEDRE GENERIQUE.
      IF (NERR.LT.10) PRINT 10
   10 FORMAT(10X, 40H*** ERROR MESSAGE CALLED FROM DU44   *** ,10X,
     1        33H THE POINT IS OUTSIDE THE ELEMENT    )
      NERR=NERR+1
   20 CONTINUE
C**** DERIVEES DES FONCTIONS DE BASE.
      CALL DUT44(NFCT,TX,TY,TZ,XT,YT,ZT,DU)
      RETURN
      END
C-----------------------------------------------------------------------
C
      SUBROUTINE ELEM1
C
C-----------------------------------------------------------------------
C**** MATRICE D'INTERPOLATION DE L'ELEMENT GENERIQUE ELARGI.
C**** INITIALISATION DE L'INVERSE DES BLOCS DIAGONAUX DE LA MATRICE Q.
      REAL LL, MX,MY,MZ, NX,NY,NZ
      COMMON /TETRAS/ X(4),Y(4),Z(4),
     1       NX(4,3),NY(4,3),NZ(4,3), MX(4),MY(4),MZ(4),
     2       D(4,3,3),D5(12),D6(4),D7(12), Q1(12,16),Q2(4,28),Q3(12,32),
     3       T(44,16), LL(3,3),IPERM(3)
      DO 10 I=1,4
         J=MOD(I,4)+1
         K=MOD(J,4)+1
         L=MOD(K,4)+1
C****    INITIALISATION DE D1, D2, D3 ET D4.
         D(I,1,1)=X(J)-X(I)
         D(I,1,2)=Y(J)-Y(I)
         D(I,1,3)=Z(J)-Z(I)
         D(I,2,1)=X(K)-X(I)
         D(I,2,2)=Y(K)-Y(I)
         D(I,2,3)=Z(K)-Z(I)
         D(I,3,1)=X(L)-X(I)
         D(I,3,2)=Y(L)-Y(I)
         D(I,3,3)=Z(L)-Z(I)
C****    INITIALISATION DE D5.
         IND=3*I-2
         D5(IND  )= NX(I,1)*(2.*X(J)-X(K)-X(L))
     1             +NY(I,1)*(2.*Y(J)-Y(K)-Y(L))
     2             +NZ(I,1)*(2.*Z(J)-Z(K)-Z(L))
         D5(IND+1)= NX(I,2)*(2.*X(K)-X(L)-X(J))
     1             +NY(I,2)*(2.*Y(K)-Y(L)-Y(J))
     2             +NZ(I,2)*(2.*Z(K)-Z(L)-Z(J))
         D5(IND+2)= NX(I,3)*(2.*X(L)-X(J)-X(K))
     1             +NY(I,3)*(2.*Y(L)-Y(J)-Y(K))
     2             +NZ(I,3)*(2.*Z(L)-Z(J)-Z(K))
C****    INITIALISATION DE D6.
         D6(I)= MX(I)*(3.*X(I)-X(J)-X(K)-X(L))
     1         +MY(I)*(3.*Y(I)-Y(J)-Y(K)-Y(L))
     2         +MZ(I)*(3.*Z(I)-Z(J)-Z(K)-Z(L))
C****    INITIALISATION DE D7.
         IND=3*I-2
         D7(IND  )=D6(I)
         D7(IND+1)=D6(I)
         D7(IND+2)=D6(I)
   10 CONTINUE
      RETURN
```

```
      END
C-----------------------------------------------------------------------
C
      SUBROUTINE ELEM2
C
C-----------------------------------------------------------------------
C**** MATRICE D'INTERPOLATION DE L'ELEMENT GENERIQUE ELARGI.
C**** INITIALISATION DES BLOCS SOUS-DIAGONAUX DE LA MATRICE Q.
      REAL LL, MX,MY,MZ, NX,NY,NZ
      COMMON /TETRAS/ X(4),Y(4),Z(4),
     1       NX(4,3),NY(4,3),NZ(4,3), MX(4),MY(4),MZ(4),
     2       D(4,3,3),D5(12),D6(4),D7(12), Q1(12,16),Q2(4,28),Q3(12,32),
     3       T(44,16), LL(3,3),IPERM(3)
      DIMENSION DU(44)
      DO 80 I=1,4
         J=MOD(I,4)+1
         K=MOD(J,4)+1
         L=MOD(K,4)+1
C****    INITIALISATION DU BLOC Q1.
         PX=0.5*(X(K)+X(L))
         PY=0.5*(Y(K)+Y(L))
         PZ=0.5*(Z(K)+Z(L))
         CALL DU44(16,NX(I,1),NY(I,1),NZ(I,1),PX,PY,PZ,DU)
         IND=3*I-2
         DO 10 M=1,16
            Q1(IND,M)=DU(M)
   10    CONTINUE
         PX=0.5*(X(J)+X(L))
         PY=0.5*(Y(J)+Y(L))
         PZ=0.5*(Z(J)+Z(L))
         CALL DU44(16,NX(I,2),NY(I,2),NZ(I,2),PX,PY,PZ,DU)
         IND=IND+1
         DO 20 M=1,16
            Q1(IND,M)=DU(M)
   20    CONTINUE
         PX=0.5*(X(K)+X(J))
         PY=0.5*(Y(K)+Y(J))
         PZ=0.5*(Z(K)+Z(J))
         CALL DU44(16,NX(I,3),NY(I,3),NZ(I,3),PX,PY,PZ,DU)
         IND=IND+1
         DO 30 M=1,16
            Q1(IND,M)=DU(M)
   30    CONTINUE
C****    INITIALISATION DU BLOC Q2.
         PX=(X(J)+X(K)+X(L))/3.
         PY=(Y(J)+Y(K)+Y(L))/3.
         PZ=(Z(J)+Z(K)+Z(L))/3.
         CALL DU44(28,MX(I),MY(I),MZ(I),PX,PY,PZ,DU)
         DO 40 M=1,28
            Q2(I,M)=DU(M)
   40    CONTINUE
C****    INITIALISATION DU BLOC Q3.
         PX=(4.*X(J)+X(K)+X(L))/6.
         PY=(4.*Y(J)+Y(K)+Y(L))/6.
         PZ=(4.*Z(J)+Z(K)+Z(L))/6.
         CALL DU44(32,MX(I),MY(I),MZ(I),PX,PY,PZ,DU)
         IND=3*I-2
         DO 50 M=1,32
            Q3(IND,M)=DU(M)
   50    CONTINUE
```

```
          PX=(X(J)+4.*X(K)+X(L))/6.
          PY=(Y(J)+4.*Y(K)+Y(L))/6.
          PZ=(Z(J)+4.*Z(K)+Z(L))/6.
          CALL DU44(32,MX(I),MY(I),MZ(I),PX,PY,PZ,DU)
          IND=IND+1
          DO 60 M=1,32
             Q3(IND,M)=DU(M)
   60     CONTINUE
          PX=(X(J)+X(K)+4.*X(L))/6.
          PY=(Y(J)+Y(K)+4.*Y(L))/6.
          PZ=(Z(J)+Z(K)+4.*Z(L))/6.
          CALL DU44(32,MX(I),MY(I),MZ(I),PX,PY,PZ,DU)
          IND=IND+1
          DO 70 M=1,32
             Q3(IND,M)=DU(M)
   70     CONTINUE
   80 CONTINUE
      RETURN
      END
C-----------------------------------------------------------------------
C
      SUBROUTINE FE2P44 (C, S)
C
C-----------------------------------------------------------------------
C**** ELEMENT GENERIQUE ELARGI.
C**** RESOLUTION DU PROBLEME D'INTERPOLATION.
C**** ENTREES  :  TETRAS BLOC COMMUN QUI DOIT AVOIR ETE PREALABLEMENT
C****                       INITIALISE A L'AIDE DES SUBROUTINES ELEM0,
C****                       ELEM1 ET ELEM2.
C****             C(1), ..., C(44) VALEURS DES PARAMETRES DE L'ELEMENT.
C**** SORTIE   :  S(1), ..., S(44) COORDONNEES DE LA FONCTION D'INTER-
C****                       POLATION DANS LA BASE D'INTERPOLATION DE
C****                       L'ELEMENT GENERIQUE ELARGI.
C**** METHODE  :  RESOLUTION DU SYSTEME LINEAIRE Q*S=C.
      REAL LL, MX,MY,MZ, NX,NY,NZ
      COMMON /TETRAS/ X(4),Y(4),Z(4),
     1        NX(4,3),NY(4,3),NZ(4,3), MX(4),MY(4),MZ(4),
     2        D(4,3,3),D5(12),D6(4),D7(12), Q1(12,16),Q2(4,28),Q3(12,32),
     3        T(44,16), LL(3,3),IPERM(3)
      DIMENSION C(44), S(44)
C**** CALCUL DE S(1), ..., S(16).
      DO 10 I=1,4
         K=4*I-3
         S(K)=C(K)
         S(K+1)=D(I,1,1)*C(K+1)+D(I,1,2)*C(K+2)+D(I,1,3)*C(K+3)
         S(K+2)=D(I,2,1)*C(K+1)+D(I,2,2)*C(K+2)+D(I,2,3)*C(K+3)
         S(K+3)=D(I,3,1)*C(K+1)+D(I,3,2)*C(K+2)+D(I,3,3)*C(K+3)
   10 CONTINUE
C**** CALCUL DE S(17), ..., S(28).
      DO 30 I=1,12
         SI=0.0
         DO 20 J=1,16
            SI=SI+Q1(I,J)*S(J)
   20    CONTINUE
         K=I+16
         S(K)=D5(I)*(C(K)-SI)
   30 CONTINUE
C**** CALCUL DE S(29), ..., S(32).
      DO 50 I=1,4
         SI=0.0
```

```
        DO 40 J=1,28
           SI=SI+Q2(I,J)*S(J)
   40   CONTINUE
        K=28+I
        S(K)=D6(I)*(C(K)-SI)
   50 CONTINUE
C**** CALCUL DE S(33), ..., S(44).
      DO 70 I=1,12
        SI=0.0
        DO 60 J=1,32
           SI=SI+Q3(I,J)*S(J)
   60   CONTINUE
        K=I+32
        S(K)=D7(I)*(C(K)-SI)
   70 CONTINUE
      RETURN
      END
C-----------------------------------------------------------------------
C
      FUNCTION D1NOD (VX,VY,VZ, M, C)
C
C-----------------------------------------------------------------------
C**** ELEMENT FINI GENERIQUE, DE CLASSE C1, DE DEGRE DEUX,
C**** A 16 PARAMETRES.
C**** DONNEES  :  M        PEUT PRENDRE LES VALEURS 1, 2, 3 OU 4.
C****              C(4*M-2), C(4*M-1) ET C(4*M) DERIVEES PARTIELLES DX,
C****                       DY ET DZ AU SOMMET A(M).
C****              (VX, VY, VZ) UN VECTEUR.
C**** SORTIE   :  D1NOD  DERIVEE DANS LA DIRECTION (VX, VY, VZ)
C****                       AU SOMMET A(M).
      DIMENSION C(44)
      IND=4*M-2
      D1NOD=VX*C(IND) + VY*C(IND+1) + VZ*C(IND+2)
      RETURN
      END
C-----------------------------------------------------------------------
C
      SUBROUTINE FE2P16 (C, S)
C
C-----------------------------------------------------------------------
C**** ELEMENT FINI GENERIQUE, DE CLASSE C1, DE DEGRE DEUX,
C**** A 16 PARAMETRES.
C**** RESOLUTION DU PROBLEME D'INTERPOLATION.
C**** ENTREES  :  TETRAS BLOC COMMUN QUI DOIT AVOIR ETE PREALABLEMENT
C****                       INITIALISE A L'AIDE DES SUBROUTINES ELEM0,
C****                       ELEM1 ET ELEM2.
C****              C(1), ..., C(16) VALEURS DES PARAMETRES DE L'ELEMENT.
C**** SORTIE   :  S(1), ..., S(44) COORDONNEES DE LA FONCTION D'INTER-
C****                       POLATION DANS LA BASE D'INTERPOLATION DE
C****                       L'ELEMENT GENERIQUE ELARGI.
C**** LES MEMOIRES C(17), ..., C(44) SONT DES PLACES DE TRAVAIL.
      REAL LL, MX,MY,MZ, NX,NY,NZ
      COMMON /TETRAS/ X(4),Y(4),Z(4),
     1       NX(4,3),NY(4,3),NZ(4,3), MX(4),MY(4),MZ(4),
     2       D(4,3,3),D5(12),D6(4),D7(12), Q1(12,16),Q2(4,28),Q3(12,32),
     3       T(44,16), LL(3,3),IPERM(3)
      DIMENSION C(44), S(44)
      DO 10 I=1,4
        J=MOD(I,4)+1
        K=MOD(J,4)+1
```

```
          L=MOD(K,4)+1
C****     CALCUL DES PARAMETRES C(17) A C(28).
          IND=3*I+14
          C(IND  )=0.5*( D1NOD(NX(I,1),NY(I,1),NZ(I,1),K,C)
     1                 +D1NOD(NX(I,1),NY(I,1),NZ(I,1),L,C) )
          C(IND+1)=0.5*( D1NOD(NX(I,2),NY(I,2),NZ(I,2),L,C)
     1                 +D1NOD(NX(I,2),NY(I,2),NZ(I,2),J,C) )
          C(IND+2)=0.5*( D1NOD(NX(I,3),NY(I,3),NZ(I,3),J,C)
     1                 +D1NOD(NX(I,3),NY(I,3),NZ(I,3),K,C) )
C****     CALCUL DES PARAMETRES C(29) A C(32).
          DJ=D1NOD(MX(I),MY(I),MZ(I),J,C)
          DK=D1NOD(MX(I),MY(I),MZ(I),K,C)
          DL=D1NOD(MX(I),MY(I),MZ(I),L,C)
          C(I+28)=(DJ+DK+DL)/3.
C****     CALCUL DES PARAMETRES C(33) A C(44).
          IND=3*I+30
          C(IND  )=(4.*DJ+DK+DL)/6.
          C(IND+1)=(DJ+4.*DK+DL)/6.
          C(IND+2)=(DJ+DK+4.*DL)/6.
   10 CONTINUE
C**** CALCUL DES COORDONNEES S(1), ..., S(44).
      CALL FE2P44(C,S)
      RETURN
      END
C-----------------------------------------------------------------------
C
      FUNCTION FINT (PX,PY,PZ, S)
C
C-----------------------------------------------------------------------
C**** ELEMENT FINI GENERIQUE, DE CLASSE C1, DE DEGRE DEUX,
C**** A 16 PARAMETRES.
C**** DONNEES  :  TETRAS BLOC COMMUN QUI DOIT AVOIR ETE PREALABLEMENT
C****                    INITIALISE A L'AIDE DE LA SUBROUTINE ELEM0.
C****             S(1), ..., S(44) COORDONNEES DE LA FONCTION D'INTER-
C****                    POLATION DANS LA BASE D'INTERPOLATION DE
C****                    L'ELEMENT GENERIQUE ELARGI.
C****             (PX, PY, PZ) UN POINT DU TETRAEDRE GENERIQUE.
C**** SORTIE   :  FINT   VALEUR DE LA FONCTION D'INTERPOLATION DE
C****                    COORDONNEES S AU POINT (PX, PY, PZ).
      DIMENSION U(44), S(44)
      CALL U44(44,PX,PY,PZ,U)
      V=0.0
      DO 10 I=1,44
         V=V+S(I)*U(I)
   10 CONTINUE
      FINT=V
      RETURN
      END
C-----------------------------------------------------------------------
C
      FUNCTION DFINT (VX,VY,VZ, PX,PY,PZ, S)
C
C-----------------------------------------------------------------------
C**** ELEMENT FINI GENERIQUE, DE CLASSE C1, DE DEGRE DEUX,
C**** A 16 PARAMETRES.
C**** DONNEES  :  TETRAS BLOC COMMUN QUI DOIT AVOIR ETE PREALABLEMENT
C****                    INITIALISE A L'AIDE DE LA SUBROUTINE ELEM0.
C****             S(1), ..., S(44) COORDONNEES DE LA FONCTION D'INTER-
C****                    POLATION DANS LA BASE D'INTERPOLATION DE
C****                    L'ELEMENT GENERIQUE ELARGI.
```

```
C****              (VX, VY, VZ) UN VECTEUR.
C****              (PX, PY, PZ) UN POINT DU TETRAEDRE GENERIQUE.
C**** SORTIE   :  DFINT  DERIVEE DE LA FONCTION D'INTERPOLATION DE
C****                   COORDONNEES S DANS LA DIRECTION (VX, VY, VZ)
C****                   AU POINT (PX,PY,PZ).
      DIMENSION DU(44), S(44)
      CALL DU44(44,VX,VY,VZ,PX,PY,PZ,DU)
      DV=0.0
      DO 10 I=1,44
         DV=DV+S(I)*DU(I)
   10 CONTINUE
      DFINT=DV
      RETURN
      END
C-----------------------------------------------------------------------
C
      SUBROUTINE ELEM3
C
C-----------------------------------------------------------------------
C**** ELEMENT FINI GENERIQUE, DE CLASSE C1, DE DEGRE DEUX,
C**** A 16 PARAMETRES.
C**** BASE D'HERMITE.   INITIALISATION DE LA MATRICE T.
      REAL LL, MX,MY,MZ, NX,NY,NZ
      COMMON /TETRAS/ X(4),Y(4),Z(4),
     1        NX(4,3),NY(4,3),NZ(4,3), MX(4),MY(4),MZ(4),
     2        D(4,3,3),D5(12),D6(4),D7(12), Q1(12,16),Q2(4,28),Q3(12,32),
     3        T(44,16), LL(3,3),IPERM(3)
      DIMENSION C(44), S(44)
      DATA C/44*0.0/
      DO 20 I=1,16
C****    CALCUL DES COORDONNEES T(1,I), ..., T(44,I) DU I-EME ELEMENT
C****    DE LA BASE D'HERMITE PAR RAPPORT A LA BASE D'INTERPOLATION
C****    DE L'ELEMENT GENERIQUE ELARGI.
         C(I)=1.0
         CALL FE2P16(C,S)
         DO 10 J=1,44
            T(J,I)=S(J)
   10    CONTINUE
         C(I)=0.0
   20 CONTINUE
      RETURN
      END
C-----------------------------------------------------------------------
C
      SUBROUTINE HERM (PX,PY,PZ, V)
C
C-----------------------------------------------------------------------
C**** ELEMENT FINI GENERIQUE, DE CLASSE C1, DE DEGRE DEUX,
C**** A 16 PARAMETRES.
C**** BASE D'ERMITE.
C**** ENTREES  :  TETRAS BLOC COMMUN QUI DOIT AVOIR ETE PREALABLEMENT
C****                   INITIALISE A L'AIDE DES SUBROUTINES ELEM0,
C****                   ELEM1, ELEM2 ET ELEM3.
C****              (PX, PY, PZ) UN POINT DU TETRAEDRE GENERIQUE.
C**** SORTIE   :  V(1), ..., V(16) VALEURS DES 16 FONCTIONS DE LA BASE
C****                   D'HERMITE AU POINT (PX, PY, PZ).
      REAL LL, MX,MY,MZ, NX,NY,NZ
      COMMON /TETRAS/ X(4),Y(4),Z(4),
     1        NX(4,3),NY(4,3),NZ(4,3), MX(4),MY(4),MZ(4),
     2        D(4,3,3),D5(12),D6(4),D7(12), Q1(12,16),Q2(4,28),Q3(12,32),
```

```
     3        T(44,16), LL(3,3),IPERM(3)
      DIMENSION V(16), U(44)
      CALL U44(44,PX,PY,PZ,U)
      DO 20 I=1,16
         SI=0.0
         DO 10 J=1,44
            SI=SI + T(J,I)*U(J)
   10    CONTINUE
         V(I)=SI
   20 CONTINUE
      RETURN
      END
C-----------------------------------------------------------------------
C
      SUBROUTINE DHERM (VX,VY,VZ, PX,PY,PZ, DV)
C
C-----------------------------------------------------------------------
C**** ELEMENT FINI GENERIQUE, DE CLASSE C1, DE DEGRE DEUX,
C**** A 16 PARAMETRES.
C**** BASE D'HERMITE.
C**** ENTREES  :  TETRAS BLOC COMMUN QUI DOIT AVOIR ETE PREALABLEMENT
C****                    INITIALISE A L'AIDE DES SUBROUTINES ELEM0,
C****                    ELEM1, ELEM2 ET ELEM3.
C****             (VX, VY, VZ) UN VECTEUR.
C****             (PX, PY,PZ) UN POINT DU TETRAEDRE GENERIQUE.
C**** SORTIE   :  DV(1), ..., DV(16) DERIVEES DES 16 FONCTIONS DE LA
C****                    BASE D'HERMITE DANS LA DIRECTION (VX, VY, VZ)
C****                    AU POINT (PX, PY, PZ).
      REAL LL, MX,MY,MZ, NX,NY,NZ
      COMMON /TETRAS/ X(4),Y(4),Z(4),
     1        NX(4,3),NY(4,3),NZ(4,3), MX(4),MY(4),MZ(4),
     2        D(4,3,3),D5(12),D6(4),D7(12), Q1(12,16),Q2(4,28),Q3(12,32),
     3        T(44,16), LL(3,3),IPERM(3)
      DIMENSION DV(16), DU(44)
      CALL DU44(44,VX,VY,VZ,PX,PY,PZ,DU)
      DO 20 I=1,16
         SI=0.0
         DO 10 J=1,44
            SI=SI + T(J,I)*DU(J)
   10    CONTINUE
         DV(I)=SI
   20 CONTINUE
      RETURN
      END
```

8.4. Tests numériques.

Nous avons procédé à des vérifications numériques du programme précédent sur l'ordinateur CDC CYBER 73 de l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne. Nous décrivons brièvement les tests effectués.

Test 8.4-1A.

Les fonctions de référence $\tilde{u}_{17} = \tilde{w}_{11}$, $\tilde{u}_{29} = \tilde{r}_{10}$, $\tilde{u}_{35} = \tilde{r}_{13}$ sont définies par morceaux (voir 6.2). Nous vérifions que ces fonctions sont de classe $C^1(\tilde{S})$. Pour ce faire, nous avons tabulé ces fonctions et leurs dérivées partielles au voisinage des plans de raccordement $x = y$, $y = z$, $z = x$.

Test 8.4-1B.

Les fonctions de référence $\tilde{u}_{28},\ldots,\tilde{u}_{44}$ et leurs dérivées partielles possèdent des indéterminations du type $\frac{0}{0}$ le long de certains segments; les segments concernés sont les arêtes des trois morceaux $\alpha_i(\tilde{S}_1)$, $\alpha_i(\tilde{S}_2)$, $\alpha_i(\tilde{S}_3)$ sur lesquels chaque fonction est rationnelle pour un $i \in \{1,2,3,4\}$ (voir 6.2). Dans le programme 8.3, ces indéterminations ont été levées comme suit; nous avons écrit l'expression analytique de la restriction de ces fonctions à certaines faces des morceaux $\alpha_i(\tilde{S}_1)$, $\alpha_i(\tilde{S}_2)$, $\alpha_i(\tilde{S}_3)$; nous avons utilisé cette expression dans un ε-voisinage de ces faces. Nous avons vérifié, par tabulation, la continuité numérique du passage de l'expression analytique générale à l'expression analytique limite.

Les tests 8.4-2 à 8.4-6 correspondent textuellement aux tests 7.4-2 à 7.4-6.

§ 9 ERREUR D'INTERPOLATION.

Dans le cas où les éléments finis constituent une famille affine, des théorèmes connus donnent des majorations de l'erreur d'interpolation (voir théorème 9.1-2). Quoique les éléments considérés dans ce travail ne constituent pas des familles affines, nous pouvons quand même obtenir des majorations analogues au cas affine (voir théorème 9.5).

Dans ce paragraphe, c et $c(\sigma)$ désignent des constantes génériques. Soit Ω un ouvert borné dans $\mathbb{R}^n$. Les espaces de SOBOLEV sont notés

$$W^{m,p}(\Omega) := \{v \in L^p(\Omega);\ \partial^\alpha v \in L^p(\Omega) \text{ pour } |\alpha| \leqslant m\}$$

avec les semi-normes

$$|v|_{j,p,\Omega} := \{\sum_{|\alpha|=j} \int_\Omega |\partial^\alpha v|^p\}^{1/p},\ j = 0(1)m,\ p \in [1,\infty[\ ,$$

$$|v|_{j,\infty,\Omega} := \max_{|\alpha|=j}\ \sup_{x \in \Omega} \text{ess } |\partial^\alpha v(x)|,\ j = 0(1)m,$$

et les normes

$$\|v\|_{m,p,\Omega} := \{\sum_{j=o}^{m} |v|^p_{j,p,\Omega}\}^{1/p},\ m \in \mathbb{N},\ p \in [1,\infty[\ ,$$

$$\|v\|_{m,\infty,\Omega} := \max_{j=o(1)m} |v|_{j,\infty,\Omega}\ ,\ m \in \mathbb{N}.$$

<u>Remarque.</u>

Dans le cas particulier $p = 2$, nous retrouvons la définition 5 de 1.1

$$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega),\ m \in \mathbb{N},$$

$$|v|_{j,\Omega} = |v|_{j,2,\Omega}\ ,\ j = 0(1)m,$$

$$\|v\|_{m,\Omega} = \|v\|_{m,2,\Omega}\ .$$

9.1. Interpolation par une famille affine d'éléments.

Définitions.

Considérons un élément fini particulier appelé élément fini de référence; cet élément est défini sur un ensemble polygonal fermé borné $\tilde{K}$ dans $\mathbb{R}^n$; l'espace vectoriel des fonctions est un sous-espace vectoriel $\tilde{U}$ de $C^s(\tilde{K})$; les paramètres de référence $\tilde{F}_1,\ldots,\tilde{F}_r$ ne font intervenir que des valeurs de fonctions en des points ou bien des valeurs de dérivées d'ordre $\leqslant s$ en des points, c'est-à-dire $\tilde{F}_i(\tilde{u}) = \tilde{u}(\tilde{A}_i)$ ou bien $\tilde{F}_i(\tilde{u}) = \partial_{\xi_i} \tilde{u}(\tilde{A}_i),\ldots,$ ou bien $\tilde{F}_i(\tilde{u}) = D^s \tilde{u}(\tilde{A}_i)(\xi_{i1},\ldots,\xi_{is})$, $\tilde{A}_i \in \tilde{K}$, $\xi_i,\xi_{i1},\ldots,\xi_{is} \in \mathbb{R}^n$, $i = 1(1)r$; nous supposons que cet élément de référence soit $\tilde{U}$-unisolvant; notons $\varphi_1,\ldots,\varphi_r$ sa base de Lagrange.

Toute application affine bijective $L: \tilde{K} \longrightarrow K$, $Lx := \ell x + b$, induit un élément fini sur K, dont l'espace des fonctions est $U = U(K) = \{\tilde{u} \circ L^{-1};\ \tilde{u} \in \tilde{U}\}$ et dont les paramètres sont $F_i(v) := \tilde{F}_i(v \circ L)$, $i = 1(1)r$. Par exemple, si $\tilde{F}_i(\tilde{u}) = \partial_\xi \tilde{u}(\tilde{A}_i)$, alors $F_i(v) = \partial_{\ell(\xi)} v(L\tilde{A}_i)$. L'élément ainsi obtenu est U-unisolvant et sa base de Lagrange est $\{\varphi_1 \circ L^{-1},\ldots,\varphi_r \circ L^{-1}\}$; en effet $F_i(\varphi_j \circ L^{-1}) = \tilde{F}_i(\varphi_j) = \delta_{ij}$, $i,j = 1(1)r$, $\dim U \leqslant r$ et le théorème 2.4 est applicable.

On dit que les éléments ainsi construits à partir du même élément de référence constituent une <u>famille affine d'éléments</u>. Deux éléments finis appartenant à la même famille affine sont appelés <u>affines-équivalents</u>.

<u>L'interpolation par une famille affine d'éléments</u> est définie sur chaque $K = L(\tilde{K})$ par

$$\Pi_a : C^s(K) \longrightarrow U,\ \Pi_a\ v := \sum_{i=1}^{r} F_i(v)\ \varphi_i \circ L^{-1}.$$

<u>Théorème 9.1-1.</u>

Soient $p \in [1,\infty]$ et $m \in \mathbb{N}$. Il existe une constante $c = c(m,n)$ indépendante de K telle que $\forall \tilde{v} \in W^{m,p}(\tilde{K})$

$$|\tilde{v} \circ L^{-1}|_{m,p,K} \leq c\ \|\ell^{-1}\|^m |\det \ell|^{1/p}\ |\tilde{v}|_{m,p,\tilde{K}} \quad .$$

$\|\ldots\|$ désigne la norme spectrale .

<u>Démonstration.</u>

Voir CIARLET [3], Theorem 3.1.2.

<u>Théorème 9.1-2.</u>

Considérons une famille affine d'éléments comme dans la définition. Soit s l'ordre le plus élevé des dérivées partielles intervenant dans les paramètres de référence. Nous supposons que tous les polynômes de degré $\leq k$ soient contenus dans l'espace de référence $\tilde{U}$ et que les nombres $m \in \mathbb{N}$, $p,q \in [1,\infty]$ soient tels que $\tilde{U} \subset W^{m,q}(\tilde{K})$ et que l'on ait les inclusions continues
$W^{k+1,p}(\tilde{K}) \subset C^s(\tilde{K})$, $W^{k+1,p}(\tilde{K}) \subset W^{m,q}(\tilde{K})$.

Alors il existe une constante $c = c(m,p,q)$ indépendante de K telle que $\forall v \in W^{k+1,p}(K)$

$$|v-\Pi_a\ v|_{m,q,K} \leq c|\det \ell|^{1/q-1/p}\ \frac{h^{k+1}}{\rho^m}\ |v|_{k+1,p,K}$$

où $h := \operatorname{diam}(K)$,

$\rho := \sup\{\operatorname{diam}(B)\ ;\ B \text{ est une boule dans } K\}$.

Démonstration.

Voir CIARLET [3], Theorem 3.1.4.

Remarque.

Pour satisfaire les deux inclusions continues, les conditions suivantes sont suffisantes

$$k+1 > s + \frac{n}{p} ,$$

$$\frac{1}{q} \geqslant \frac{1}{p} - \frac{k+1-m}{n} .$$

Les éléments de référence considérés dans ce travail satisfont $n = 2$ ou 3, $s = 1$, $k = 2$; nous supposerons par la suite que $p \in]\frac{n}{2}, \infty]$. Comme on a seulement $\tilde{U} \subset W^{2,\infty}(\tilde{K})$, nous supposerons que $m = 0,1$ ou 2.

Théorème 9.1-3.

c désignant une constante générique ne dépendant que de $\tilde{K}$, on a

$$\|\ell\| \leqslant c\, h,$$

$$\|\ell^{-1}\| \leqslant \frac{c}{\rho} ,$$

$$|\det \ell| \leqslant c\, h^n,$$

$$|\det \ell|^{-1} \leqslant \frac{c}{\rho^n} .$$

Démonstration.

Voir par exemple CIARLET [3], § 3.1.

9.2. Erreur d'interpolation pour le triangle.

Nous considérons maintenant l'élément fini triangulaire de classe C^1 à neuf paramètres du paragraphe 3 (voir 3.3). Pour un triangle T donné et une fonction $v \in W^{3,p}(T)$, $p > 1$, nous notons $\Pi v \in V = V(T)$ l'interpolant de v sur le triangle T. Nous traitons les deux variantes simultanément, c'est-à-dire $V = V^I$ ou V^{II} (voir 3.7). Désignons par $h = h(T)$ le diamètre de T et par $\rho = \rho(T)$ le diamètre du cercle inscrit dans T.

Théorème 9.2.

Soient $p \in \left]1,\infty\right]$ et $\sigma > 0$. Alors il existe une constante $c(\sigma) = c(\sigma,p)$ telle que pour tous les triangles T avec $\frac{h(T)}{\rho(T)} \leq \sigma$, $\forall v \in W^{3,p}(T)$ et pour $m = 0,1,2$,

$$|v - \Pi v|_{m,p,T} \leq c(\sigma) h^{3-m} |v|_{3,p,T} .$$

Démonstration.

Pour analyser l'erreur $v - \Pi v$, nous introduisons deux autres interpolations.

L'élément affine est l'élément sur T qui est affine-équivalent à l'élément de référence 3.5; notons $U = U^I(T)$ ou $U^{II}(T)$ l'espace correspondant et $\Pi_a : W^{3,p}(T) \longrightarrow U$ l'interpolation selon les paramètres affines-équivalents à $\tilde{F}_{ij}$, $j = 0,1,2$, $i = 1,2,3$, $\tilde{G}_i$, $i = 1,2,3$ (voir 3.2).

L'élément élargi est décrit dans 3.6; l'espace correspondant est $U = U(T)$ comme pour l'élément affine; notons $\Pi_Q : W^{3,p}(T) \longrightarrow U$ l'interpolation selon les paramètres génériques $Q_1,\ldots,Q_{12}$ (voir 3.2).

Nous décomposons l'erreur d'interpolation en trois termes

$$v - \Pi v = (v - \Pi_a v) + (\Pi_a v - \Pi_Q v) + (\Pi_Q v - \Pi v).$$

La majoration des deux premiers termes

$$v - \Pi_Q v = (v - \Pi_a v) + (\Pi_a v - \Pi_Q v)$$

a été inspirée par l'analyse de l'erreur d'interpolation sur le triangle d'ARGYRIS (voir par exemple CIARLET [3] § 6.1).

Premier terme.

Par le théorème 9.1-2, $\forall v \in W^{3,p}(T)$

$$|v - \Pi_a v|_{m,p,T} \leqslant c \frac{h^3}{\rho^m} |v|_{3,p,T}$$

pour $m = 0,1,2$ et $p \in]1,\infty]$. Par l'hypothèse $\frac{h}{\rho} \leqslant \sigma$,

$$|v - \Pi_a v|_{m,p,T} \leqslant c(\sigma) \cdot h^{3-m} |v|_{3,p,T}$$

où $c(\sigma) = c \cdot \sigma^m$.

Deuxième terme.

$\Pi_a v - \Pi_Q v$ est un élément de U. Nous l'exprimons au moyen des paramètres et de la base de Lagrange de l'élément affine. Comme $(\Pi_a v - \Pi_Q v)(A_i) = 0$ et $\text{grad}(\Pi_a v - \Pi_Q v)(A_i) = 0$, $i = 1,2,3$, nous aurons

$$\Pi_a v - \Pi_Q v = \sum_{i=1}^{3} \partial_{\ell(\tilde{n}_i)} (\Pi_a v - \Pi_Q v)(B_i) \; \varphi_{9+i} \circ L^{-1}.$$

Puisque $\Pi_a v - \Pi_Q v$ est un polynôme de degré $\leqslant 3$ en l'abscisse curviligne le long des côtés de T, il est nul le long des côtés. Par suite,

$$\partial_{\ell(\tilde{n}_i)} (\Pi_a v - \Pi_Q v)(B_i)$$

$$= < \ell(n_i), n_i > \; \partial_{n_i} (\Pi_a v - \Pi_Q v)(B_i)$$

$$= < \ell(\tilde{n}_i), n_i > \; G_i \; (\Pi_a v - v).$$

On a $< \ell(\tilde{n}_i), n_i > \; \leqslant c \, ||\ell|| \leqslant ch.$

Par le théorème 9.1-2, pour $p > 1$,

$$|G_i(\Pi_a v - v)| \leqslant c\, |v - \Pi_a v|_{1,\infty,T}$$
$$\leqslant c \frac{h^3}{\rho^{1+2/p}} |v|_{3,p,T} .$$

Par le théorème 9.1-1, pour $i = 1,2,3$,

$$|\varphi_{9+i} \circ L^{-1}|_{m,p,T} \leqslant c \frac{h^{2/p}}{\rho^m} |\varphi_{9+i}|_{m,p,\tilde{T}}$$
$$\leqslant c \frac{h^{2/p}}{\rho^m} .$$

Finalement,

$$|\Pi_a v - \Pi_Q v|_{m,p,T} \leqslant c \frac{h^{4+2/p}}{\rho^{m+1+2/p}} |v|_{3,p,T}$$
$$\leqslant c(\sigma)\, h^{3-m} |v|_{3,p,T} .$$

Troisième terme.

$\Pi_Q v - \Pi v$ est un élément de U que nous exprimons à l'aide des paramètres et de la base de l'élément affine. Puisque $(\Pi_Q v - \Pi v)(A_i) = 0$, $\text{grad}(\Pi_Q v - \Pi v)(A_i) = 0$, $i = 1,2,3$, on a

$$\Pi_Q v - \Pi v = \sum_{i=1}^{3} \partial_{\ell(n_i)} (\Pi_Q v - \Pi v)(B_i)\ \varphi_{9+i} \circ L^{-1}.$$

Comme $\Pi_Q v - \Pi v$ est un polynôme de degré $\leqslant 3$ par rapport à l'abscisse curviligne le long des côtés de T, $\Pi_Q v - \Pi v$ est nul le long des côtés. Par suite,

$$\Pi_Q v - \Pi v = \sum_{i=1}^{3} < \ell(\tilde{n}_i), n_i > \ \partial_{n_i} (\Pi_Q v - \Pi v)(B_i)\ \varphi_{9+i} \circ L^{-1}$$
$$= \sum_{i=1}^{3} < \ell(\tilde{n}_i), n_i > \ G_i(\Pi_Q v - \Pi v)\ \varphi_{9+i} \circ L^{-1}.$$

Par définition de Π v (voir 3.7), nous avons

$$G_i(\Pi_Q v - \Pi v) = \partial_{n_i} v(B_i) - \frac{1}{2}\{\partial_{n_i} v(A_j) + \partial_{n_i} v(A_k)\}$$

où (i,j,k) désigne une permutation cyclique des nombres (1,2,3). Pour $w \in W^{2,p}(T)$, $p > 1$, notons $\Pi_\ell\, w$ l'interpolation linéaire sur le triangle T avec les paramètres $w(A_1)$, $w(A_2)$, $w(A_3)$.
Ainsi, $G_i(\Pi_Q v - \Pi v) = \partial_{n_i} v(B_i) - \Pi_\ell(\partial_{n_i} v)(B_i)$.

Nous utilisons le théorème 9.1-2 pour Π_ℓ avec $n = 2$, $s = 0$, $k = 1$, $w = \partial_{n_i} v \in W^{2,p}(T)$, $p > 1$;

$$\begin{aligned} |G_i(\Pi_Q v - \Pi v)| &= |(w - \Pi_\ell\, w)(B_i)| \\ &\leqslant |w - \Pi_\ell\, w|_{0,\infty,T} \\ &\leqslant c|\det \ell|^{-1/p}\, h^2 |w|_{2,p,T} \\ &\leqslant c\, \frac{h^2}{\rho^{2/p}}\, |v|_{3,p,T}\ . \end{aligned}$$

Nous obtenons finalement

$$\begin{aligned} |\Pi_Q v - \Pi v|_{m,p,T} &\leqslant c\, \frac{h^{3+2/p}}{\rho^{m+2/p}}\, |v|_{3,p,T} \\ &\leqslant c(\sigma)\, h^{3-m} |v|_{3,p,T}\ , \end{aligned}$$

$m = 0,1,2$.



9.3. Erreur d'interpolation pour la variante I-C.

Pour un tétraèdre S donné et une fonction $v \in W^{3,p}(S)$, $p > \frac{3}{2}$, nous notons $\Pi\, v \in V = V(S)$ l'interpolant de v sur le tétraèdre S par l'élément fini de la variante I-C. Désignons par $h = h(S)$ le diamètre de S et par $\rho = \rho(S)$ le diamètre de la sphère inscrite dans S.

Théorème 9.3.

Soient $p \in]\frac{3}{2},\infty]$ et $\sigma > 0$. Alors il existe une constante $c(\sigma) = c(\sigma,p)$ telle que pour tous les tétraèdres S avec $\frac{h(S)}{\rho(S)} \leqslant \sigma$, $\forall v \in W^{3,p}(S)$ et pour $m = 0,1,2$,

$$|v - \Pi\ v|_{m,p,S} \leqslant c(\sigma)\ h^{3-m}\ |v|_{3,p,S}\ .$$

Démonstration.

Pour analyser l'erreur $v - \Pi\ v$, nous introduisons quatre autres interpolations.

a) L'élément affine est l'élément sur S qui est affine-équivalent à l'élément de référence 6.2; notons $U = U(S)$ l'espace correspondant; les paramètres sont affines-équivalents aux 44 paramètres de référence $\tilde{F}_{10},\ldots,\tilde{F}_{43},\tilde{G}_{11},\ldots,\tilde{G}_{43},\tilde{H}_1,\ldots,\tilde{H}_{43}$ (voir 6.1); désignons par $\Pi_a\ v \in U$ l'interpolant obtenu à l'aide de cet élément.

b) L'interpolation Π_b: $W^{3,p}(S) \longrightarrow U$ est obtenue en remplaçant dans Π_a les 28 premiers paramètres par les paramètres génériques correspondants $F_{10},\ldots,F_{43},G_{11},\ldots,G_{43}$ (voir 6.1).

c) L'interpolation Π_c: $W^{3,p}(S) \longrightarrow U$ est obtenue en remplaçant dans Π_b les paramètres $G_{11},\ldots,G_{43}$ par des contraintes linéaires (voir 6.4).

d) L'interpolation Π_d: $W^{3,p}(S) \longrightarrow U$ est obtenue en remplaçant dans Π_c les 16 derniers paramètres par les paramètres génériques correspondants $H_1,\ldots,H_4,H_{11},\ldots,H_{43}$.

Le tableau suivant rappelle quels sont les paramètres utilisés pour chaque interpolation

	Π_a	Π_b	Π_c	Π_d	Π
les 16 paramètres aux sommets sont	affines	génériques	génériques	génériques	génériques
les 12 paramètres aux milieu des arêtes sont	affines	génériques	remplacés	remplacés	remplacés
les 16 paramètres dans les faces sont	affines	affines	affines	génériques	remplacés

Nous décomposons l'erreur d'interpolation en cinq termes

$$v - \Pi\, v = (v - \Pi_a v) + (\Pi_a v - \Pi_b v) + (\Pi_b v - \Pi_c v)$$

$$+ (\Pi_c v - \Pi_d v) + (\Pi_d v - \Pi\, v).$$

Premier terme.

Par le théorème 9.1-2, pour $v \in W^{3,p}(S)$, $p > \frac{3}{2}$, $m = 0,1,2$ et $q \in [1,\infty]$ tel que $\frac{1}{q} \geqslant \frac{1}{p} - \frac{3-m}{3}$, nous avons

$$|v - \Pi_a\, v|_{m,q,S} \leqslant c|\det \ell|^{1/q-1/p} \frac{h^3}{\rho^m} |v|_{3,p,S}$$

$$\leqslant c\, \frac{h^{3+3/q}}{\rho^{m+3/p}} |v|_{3,p,S}\ .$$

Avec l'hypothèse $\frac{h}{\rho} \leqslant \sigma$ et en prenant $q = p$,

$$|v - \Pi_a\, v|_{m,p,S} \leqslant c(\sigma)\ h^{3-m} |v|_{3,p,S}\ .$$

Deuxième terme.

$\Pi_a\, v - \Pi_b\, v$ est un élément de U. Nous l'exprimons à l'aide des paramètres et de la base de Lagrange de l'élément affine. Pour $i = 1(1)4$, on a $(\Pi_a\, v - \Pi_b\, v)(A_i) = 0$, $\operatorname{grad}(\Pi_a\, v - \Pi_b\, v)(A_i) = 0$,

$$\partial_{\ell(\tilde{m}_i)}(\Pi_a\, v - \Pi_b\, v)(C_i) = 0,\ \partial_{\ell(\tilde{m}_i)}(\Pi_a\, v - \Pi_b\, v)(C_{ij}) = 0,$$

$j = 1,2,3$; par suite

$$\Pi_a v - \Pi_b v = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{3} \partial_{\ell(\tilde{n}_{ij})} (\Pi_a v - \Pi_b v)(B_{ij}) \; \varphi_{13+3i+j} \circ L^{-1}.$$

Par rapport à l'abscisse curviligne le long des arêtes, $\Pi_a v - \Pi_b v$ est un polynôme de degré $\leqslant 3$, donc nul. Ainsi

$$\partial_{\ell(\tilde{n}_{ij})} (\Pi_a v - \Pi_b v)(B_{ij})$$

$$= < \ell(\tilde{n}_{ij}), n_{ij} > \; \partial_{n_{ij}} (\Pi_a v - \Pi_b v)(B_{ij})$$

$$= < \ell(\tilde{n}_{ij}), n_{ij} > \; G_{ij} (\Pi_a v - \Pi_b v)$$

$$= < \ell(\tilde{n}_{ij}), n_{ij} > \; G_{ij} (\Pi_a v - v).$$

On a $< \ell(\tilde{n}_{ij}), n_{ij} > \; \leqslant c \, ||\ell|| \leqslant ch$.

Par le théorème 9.1-2, pour $p > \frac{3}{2}$,

$$|G_{ij}(\Pi_a v - v)| \leqslant c |v - \Pi_a v|_{1,\infty,S}$$

$$\leqslant c \frac{h^3}{\rho^{1+3/p}} |v|_{3,p,S} .$$

Par le théorème 9.1-1, pour $q \in [0,1]$, $m = 0,1,2$ et $\nu = 17(1)28$,

$$|\varphi_\nu \circ L^{-1}|_{m,q,S} \leqslant c \frac{h^{3/q}}{\rho^m} |\varphi_\nu|_{m,q,\tilde{S}}$$

$$\leqslant c \frac{h^{3/q}}{\rho^m} .$$

Ainsi, pour $p \in \left]\frac{3}{2},\infty\right]$, $q \in [0,1]$ et $m = 0,1,2$

$$|\Pi_a v - \Pi_b v|_{m,q,S} \leqslant c \frac{h^{4+3/q}}{\rho^{m+1+3/p}} |v|_{3,p,S} .$$

Avec l'hypothèse $\frac{h}{\rho} \leqslant \sigma$ et en prenant $q = p > \frac{3}{2}$,

$$|\Pi_a v - \Pi_b v|_{m,p,S} \leqslant c(\sigma) \; h^{3-m} |v|_{3,p,S} .$$

<u>Troisième terme.</u>

$\Pi_b v - \Pi_c v$ est un élément de U. Nous l'exprimons à l'aide des paramètres et de la base de Lagrange de l'élément affine.

Pour $i = 1(1)4$, $(\Pi_b v - \Pi_c v)(A_i) = 0$, $\text{grad}(\Pi_b v - \Pi_c v)(A_i) = 0$,

$\partial_{\ell(\tilde{m}_i)}(\Pi_b v - \Pi_c v)(C_i) = 0$, $\partial_{\ell(\tilde{m}_i)}(\Pi_b v - \Pi_c v)(C_{ij}) = 0$,

$j = 1,2,3$; par suite,

$$\Pi_b v - \Pi_c v = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{3} \partial_{\ell(\tilde{n}_{ij})}(\Pi_b v - \Pi_c v)(B_{ij}) \ \varphi_{13+3i+j} \circ L^{-1}.$$

Par rapport à l'abscisse curviligne le long des arêtes,

$\Pi_b v - \Pi_c v$ est un polynôme de degré $\leqslant 3$, donc nul. Par suite,

$$\partial_{\ell(\tilde{n}_{ij})}(\Pi_b v - \Pi_c v)(B_{ij})$$

$$= < \ell(\tilde{n}_{ij}), n_{ij} > \ \partial_{n_{ij}}(\Pi_b v - \Pi_c v)(B_{ij})$$

$$= < \ell(\tilde{n}_{ij}), n_{ij} > \ G_{ij}(\Pi_b v - \Pi_c v).$$

Pour $w \in W^{2,p}(S)$, notons $\Pi_\ell w$ l'interpolation linéaire de w sur le tétraèdre S avec les paramètres $w(A_1)$, $w(A_2)$, $w(A_3)$, $w(A_4)$.

Soit (i,j,k,ℓ) une permutation cyclique des nombres $(1,2,3,4)$.

D'après 6.4,

$$G_{ij}(\Pi_b v - \Pi_c v) = \begin{cases} \partial_{n_{i1}} v(B_{i1}) - \frac{1}{2}\{\partial_{n_{i1}} v(A_k) + \partial_{n_{i1}} v(A_\ell)\} \text{ si } j=1, \\ \partial_{n_{i2}} v(B_{i2}) - \frac{1}{2}\{\partial_{n_{i2}} v(A_\ell) + \partial_{n_{i2}} v(A_j)\} \text{ si } j=2, \\ \partial_{n_{i3}} v(B_{i3}) - \frac{1}{2}\{\partial_{n_{i3}} v(A_j) + \partial_{n_{i3}} v(A_k)\} \text{ si } j=3, \end{cases}$$

$$= \{\partial_{n_{ij}} v - \Pi_\ell(\partial_{n_{ij}} v)\} \ (B_{ij}).$$

Nous utilisons le théorème 9.1-2 pour Π_ℓ avec $n = 3$, $k = 1$, $s = 0$, $p > \frac{3}{2}$; pour $w = \partial_{n_{ij}} v \in W^{2,p}(S)$,

$$|G_{ij}(\Pi_b\, v - \Pi_c\, v)| = |(w-\Pi_\ell w)(B_{ij})|$$
$$\leqslant |w-\Pi_\ell\, w|_{0,\infty,S}$$
$$\leqslant c|\det \ell|^{-1/p}\, h^2 |w|_{2,p,S}$$
$$\leqslant c\, \frac{h^2}{\rho^{3/p}}\, |v|_{3,p,S}\ .$$

Puisque $< \ell(\tilde{n}_{ij}), n_{ij} > \ \leqslant$ ch et pour $q \in [1,\infty]$, $m = 0,1,2$ et $\nu = 17(1)28$

$$|\varphi_\nu \circ L^{-1}|_{m,q,S} \leqslant c\, \frac{h^{3/q}}{\rho^m}\ ,$$ nous aurons

$$|\Pi_b\, v - \Pi_c\, v|_{m,q,S} \leqslant c\, \frac{h^{3+3/q}}{\rho^{m+3/p}}\, |v|_{3,p,S}\ .$$

Avec l'hypothèse $\frac{h}{\rho} \leqslant \sigma$ et en prenant $q = p > \frac{3}{2}$,

$$|\Pi_b\, v - \Pi_c\, v|_{m,p,S} \leqslant c(\sigma)\, h^{3-m} |v|_{3,p,S}\ .$$

Quatrième terme.

$\Pi_c\, v - \Pi_d\, v$ est un élément de U. Pour $i = 1(1)4$, $(\Pi_c\, v - \Pi_d\, v)(A_i)=0$, $\mathrm{grad}(\Pi_c\, v - \Pi_d\, v)(A_i) = 0$; par suite, pour les paramètres remplacés, nous aurons aussi $G_{ij}(\Pi_c\, v - \Pi_d\, v) = 0$, $j = 1,2,3$, $i = 1(1)4$.

Par construction des espaces $U = U(S)$ et $V^I = V^I(S) \subset U$ (voir 6.4), la restriction de $\Pi_c\, v - \Pi_d\, v$ à une face T du tétraèdre appartient à l'espace $V^I(T)$ défini sous 3.7; comme les 9 paramètres de cet élément triangulaire sont nuls, il s'ensuit que la restriction de $\Pi_c\, v - \Pi_d\, v$ à T est nulle.

Nous exprimons $\Pi_c\, v - \Pi_d\, v$ à l'aide des paramètres et de la base de Lagrange de l'élément affine. Il vient

$$\Pi_c v - \Pi_d v = \sum_{i=1}^{4} \partial_{\ell(\tilde{m}_i)} (\Pi_c v - \Pi_d v)(C_i) \; \varphi_{28+i} \circ L^{-1}$$

$$+ \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{3} \partial_{\ell(\tilde{m}_i)} (\Pi_c v - \Pi_d v)(C_{ij}) \; \varphi_{29+3i+j} \circ L^{-1}$$

$$= \sum_{i=1}^{4} < \ell(\tilde{m}_i), m_i > H_i(\Pi_c v - \Pi_d v) \; \varphi_{28+i} \circ L^{-1}$$

$$+ \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{3} < \ell(\tilde{m}_i), m_i > H_{ij}(\Pi_c v - \Pi_d v) \; \varphi_{29+3i+j} \circ L^{-1}$$

$$= \sum_{i=1}^{4} < \ell(\tilde{m}_i), m_i > H_i(\Pi_c v - v) \; \varphi_{28+i} \circ L^{-1}$$

$$+ \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{3} < \ell(\tilde{m}_i), mi > H_{ij}(\Pi_c v - v) \; \varphi_{29+3i+j} \circ L^{-1}.$$

Nous utilisons maintenant les majorations obtenues pour le premier, le deuxième et le troisième terme avec $m = 1$, $q = \infty$, $p > \frac{3}{2}$ et $v \in W^{3,p}(S)$

$$|H_i(\Pi_c v - v)| \leqslant c|v - \Pi_c v|_{1,\infty,S}$$

$$\leqslant c|v - \Pi_a v|_{1,\infty,S} + c|\Pi_a v - \Pi_b v|_{1,\infty,S} + c|\Pi_b v - \Pi_c v|_{1,\infty,S}$$

$$\leqslant \frac{h^3}{\rho^{1+3/p}} |v|_{3,p,S} \{c + c\frac{h}{\rho} + c\}$$

$$\leqslant c(\sigma) \frac{h^3}{\rho^{1+3/p}} |v|_{3,p,S} .$$

De même

$$|H_{ij}(\Pi_c v - v)| \leqslant c(\sigma) \frac{h^3}{\rho^{1+3/p}} |v|_{3,p,S}$$

pour $i = 1(1)4$ et $j = 1,2,3$.

Par le théorème 9.1-1, pour $\nu = 29(1)44$,

$$|\varphi_\nu \circ L^{-1}|_{m,p,S} \leq c \frac{h^{3/p}}{\rho^m} |\varphi_\nu|_{m,p,\tilde{S}}$$

$$\leq c \frac{h^{3/p}}{\rho^m} .$$

Finalement, pour $m = 0,1,2$ et $p > \frac{3}{2}$,

$$|\Pi_c v - \Pi_d v|_{m,p,S} \leq c(\sigma) \frac{h^{4+3/p}}{\rho^{m+1+3/p}} |v|_{3,p,S}$$

$$\leq c(\sigma)\, h^{3-m} |v|_{3,p,S} .$$

Cinquième terme.

Comme pour le quatrième terme, on montre que $\Pi_d v - \Pi v$ est un élément de U qui s'annule dans les quatre faces de S; ainsi

$$\Pi_d v - \Pi v = \sum_{i=1}^{4} \partial_{\ell(\tilde{m}_i)} (\Pi_d v - \Pi v)(C_i)\ \varphi_{28+i} \circ L^{-1}$$

$$+ \sum_{i=1}^{4} \sum_{\mu=1}^{3} \partial_{\ell(\tilde{m}_i)} (\Pi_d v - \Pi v)(C_{i\mu})\ \varphi_{29+3i+\mu} \circ L^{-1}$$

$$= \sum_{i=1}^{4} < \ell(\tilde{m}_i), m_i > \ H_i(\Pi_d v - \Pi v)\ \varphi_{28+i} \circ L^{-1}$$

$$+ \sum_{i=1}^{4} \sum_{\mu=1}^{3} < \ell(\tilde{m}_i), m_i > \ H_{i\mu}(\Pi_d v - \Pi v)\ \varphi_{29+3i+\mu} \circ L^{-1} .$$

Comme pour le troisième terme, notons $\Pi_\ell w$ l'interpolant linéaire de $w \in W^{2,p}(S)$, $p > \frac{3}{2}$. Soit (i,j,k,ℓ) une permutation cyclique des nombres $(1,2,3,4)$. Par définition de Πv (voir 6.4),

$$H_i(\Pi_d v - \Pi v) = \partial_{m_i} v(C_i) - \frac{1}{3}\partial_{m_i} v(A_j) - \frac{1}{3}\partial_{m_i} v(A_k) - \frac{1}{3}\partial_{m_i} v(A_\ell)$$

$$= \partial_{m_i} v(C_i) - \Pi_\ell(\partial_{m_i} v)(C_i)$$

$$H_{i1}(\Pi_d v - \Pi v) = \partial_{m_i} v(C_{i1}) - \frac{2}{3}\partial_{m_i} v(A_j) - \frac{1}{6}\partial_{m_i} v(A_k) - \frac{1}{6}\partial_{m_i} v(A_\ell)$$

$$= \{\partial_{m_i} v - \Pi_\ell(\partial_{m_i} v)\}(C_{i1}),$$

$$H_{i\mu}(\Pi_d v - \Pi v) = \{\partial_{m_i} v - \Pi_\ell(\partial_{m_i} v)\}(C_{i\mu}),\ \mu = 1,2,3.$$

Nous utilisons le théorème 9.1-2 pour Π_ℓ avec $n = 3$, $k = 1$, $s = 0$, $p > \frac{3}{2}$; pour $v \in W^{3,p}(S)$, on a $w = \partial_{m_i} v \in W^{2,p}(S)$,

$$|H_i(\Pi_d v - \Pi v)| = |(w - \Pi_\ell w)(C_i)|$$

$$\leq |w - \Pi_\ell w|_{0,\infty,S}$$

$$\leq c|\det \ell|^{-1/p} h^2 |w|_{2,p,S}$$

$$\leq c\frac{h^2}{\rho^{3/p}}|v|_{3,p,S} \quad \text{et}$$

$$|H_{i\mu}(\Pi_d v - \Pi v)| \leq c\frac{h^2}{\rho^{3/p}}|v|_{3,p,S}$$

pour $i = 1(1)4$ et $\mu = 1,2,3$.

Puisque $< \ell(\tilde{m}_i), m_i > \leq ch$ et pour $\nu = 28(1)44$ $|\varphi_\nu \circ L^{-1}|_{m,p,S} \leq c\frac{h^{3/p}}{\rho^m}$, nous aurons finalement

$$|\Pi_d v - \Pi v|_{m,p,S} \leq c\frac{h^{3+3/p}}{\rho^{m+3/p}}|v|_{3,p,S}$$

$$\leq c(\sigma)\ h^{3-m}|v|_{3,p,S}\ .$$



9.4. Erreur d'interpolation pour la variante II.

Pour un tétraèdre S donné et une fonction $v \in W^{3,p}(S)$, $p > \frac{3}{2}$, nous notons $\Pi\, v \in V = V(S)$ l'interpolant de v sur le tétraèdre S par l'élément fini de la variante II. Désignons par $h = h(S)$ le diamètre de S et par $\rho = \rho(S)$ le diamètre de la sphère inscrite dans S.

Théorème 9.4.

Soient $p \in \left]\frac{3}{2},\infty\right]$ et $\sigma > 0$. Alors il existe une constante $c(\sigma) = c(\sigma,p)$ telle que pour tous les tétraèdres S avec $\frac{h(S)}{\rho(S)} \leqslant \sigma$, $\forall v \in W^{3,p}(S)$ et pour $m = 0,1,2$,

$$|v - \Pi\, v|_{m,p,S} \leqslant c(\sigma)\, h^{3-m} |v|_{3,p,S} .$$

La démonstration de ce théorème est précédée par des rappels et par trois lemmes. Rappelons quel est l'élément de référence utilisé dans cette variante;

- l'espace des fonctions de référence $\tilde{U}_a$ dépend de paramètres libres $a:=(\hat{\mu}_1,\hat{\mu}_2,\hat{\mu}_3,\hat{\mu}_4)$, $\hat{\mu}_i \in \mathbb{R}^3$ satisfaisant $\hat{\mu}_{ix} + \hat{\mu}_{iy} + \hat{\mu}_{iz} = 1$, $i = 1(1)4$; $\tilde{U}_a$ est l'espace engendré par 16 polynômes $\tilde{u}_1,\ldots,\tilde{u}_{16}$ et par 12 fonctions de référence
$$\tilde{u}_{13+3i+j}(x,y,z) = \tilde{w}_{ij}(\phi_i\ \hat{\mu}_i;x,y,z),\ i = 1(1)4,\ j = 1,2,3;$$
- les paramètres de référence sont $\tilde{F}_{10},\tilde{F}_{11},\ldots,\tilde{F}_{43},\tilde{G}_{11},\tilde{G}_{12},\ldots,\tilde{G}_{43}$ (voir 5.1); notons $\{\varphi^a_1,\ldots,\varphi^a_{28}\}$ la base de Lagrange correspondante.

Lemme 9.4-1.

Dans l'élément de référence avec paramètres libres $a = (\hat{\mu}_1,\ldots,\hat{\mu}_4)$, l'élément de la base de Lagrange correspondant au paramètre $\tilde{G}_{ij}$ est

$$\varphi^a_{13+3i+j}(x,y,z) = \tilde{w}_{ij}(\phi_i\ \hat{\mu}_i\ ;\ x,y,z),$$

$i = 1(1)4,\ j = 1,2,3.$

Démonstration.

Nous avons vu dans 5.2 que la matrice d'interpolation par rapport à la base $\tilde{u}_1,\ldots,\tilde{u}_{28}$ est

$$\left[\tilde{Q}\right] = \begin{bmatrix} I_{16} & 0 \\ & \\ M & I_{12} \end{bmatrix}.$$

Cherchons la base de Lagrange

$$\varphi^a_n = \sum_{m=1}^{28} r_{mn}\ \tilde{u}_m\ ,\quad n = 1(1)28.$$

D'après 2.6, la matrice $R = (r_{mn})$ est l'inverse de $\left[\tilde{Q}\right]$,

$$R = \begin{bmatrix} I_{16} & 0 \\ & \\ -M & I_{12} \end{bmatrix}.$$

Ainsi $\varphi^a_n = u_n$ pour $n = 17(1)28$.



L'élément élargi est décrit sous 5.3. Rappelons que

- l'espace des fonctions est

$$\mathbf{U}_{a(S)} = \{\tilde{u}\circ L^{-1};\ \tilde{u}\in\tilde{U}_{a(S)}\}$$

où les paramètres

$$a(S) = (\hat{\mu}_1(S), \hat{\mu}_2(S), \hat{\mu}_3(S), \hat{\mu}_4(S))$$

sont déterminés par

$$\hat{\mu}_i(S) = c_i \phi_i^{-1} \ell^{-1}(m_i),$$

les scalaires c_i étant choisis tels que

$$\hat{\mu}_{ix}(S) + \hat{\mu}_{iy}(S) + \hat{\mu}_{iz}(S) = 1, \quad i = 1(1)4;$$

- les paramètres de l'élément élargi sont les 28 paramètres génériques F_{ij}, $j = 0(1)3$, G_{ij}, $j = 1,2,3$, $i = 1(1)4$ (voir 5.1).

La variante II est obtenue en remplaçant les paramètres $G_{11},\ldots,G_{43}$ par des contraintes linéaires dans l'élément élargi (voir 5.4).

Lemme 9.4-2.

Pour tous les tétraèdres S avec $\frac{h(S)}{\rho(S)} \leqslant \sigma$, il existe une constante $c(\sigma)$ indépendante de S telle que, pour $i = 1(1)4$,

$$\|\hat{\mu}_i(S)\| \leqslant c(\sigma).$$

Démonstration.

Introduisons les fonctions

$$\mu_i(S) := \phi_i^{-1} \ell^{-1}(m_i)$$

$$h\ (S) := \text{diamètre de } S$$

$$\theta_i(S) := h(S)\ \{\mu_{ix}(S) + \mu_{iy}(S) + \mu_{iz}(S)\}$$

qui permettent d'écrire

$$\hat{\mu}_i(S) = \frac{\mu_i(S)}{\mu_{ix}(S)+\mu_{iy}(S)+\mu_{iz}(S)}$$

$$= \frac{h(S)\mu_i(S)}{\theta_i(S)} , \quad i = 1(1)4.$$

Par le théorème 9.1-3,

$$\|h(S)\mu_i(S)\| = h(S)\| \phi_i^{-1} \ell^{-1}(m_i)\|$$
$$\leq h(S)\| \phi_i^{-1}\| \ \| \ell^{-1}\| \ \|m_i\|$$
$$\leq h(S) \frac{c}{\rho(S)}$$
$$\leq c \cdot \sigma$$

Pour démontrer le lemme, il suffit de montrer qu'il existe une constante $c(\sigma) > 0$ telle que $|\theta_i(S)| \geq c(\sigma)$ pour tous les S avec $\frac{h(S)}{\rho(S)} \leq \sigma$.

Puisque θ_i est invariant pour les translations de S, nous pouvons supposer que $A_1 = 0$ et nous pouvons identifier S avec une application linéaire inversible $\ell \in GL(3, \mathbb{R})$ comme suit:

$e_1 := 0$, $\{ e_2, e_3, e_4\}$ base canonique de $\mathbb{R}^3$, $\ell(e_i) = A_i$, $i = 2,3,4$.

Soit (i,j,k,ℓ) une permutation cyclique des nombres $(1,2,3,4)$; nous avons

$$m_i = m_i(\ell) = \frac{\ell(e_k-e_j) \times \ell(e_\ell-e_j)}{\|\ell(e_k-e_j) \times \ell(e_\ell-e_j)\|} ,$$

$$h = h(\ell) = \max_{x,y\in\tilde{S}} \|\ell(x) - \ell(y)\|,$$

$$\theta_i : GL(3, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$\theta_i(\ell) = < \phi_i^{-1} \ell^{-1}(h\, m_i) , e_2 + e_3 + e_4 > .$$

θ_i possède les propriétés suivantes:

(i) $\theta_i(\ell) \neq 0 \quad \forall \ell \in GL(3, \mathbb{R})$. En effet,

$\{hm_i \, , \, \ell(e_k - e_j), \, \ell(e_\ell - e_j)\}$ étant une base de $\mathbb{R}^3$, il en sera de même pour

$$\{\phi_i^{-1} \, \ell^{-1}(hm_i), \, \phi_i^{-1}(e_k - e_j), \, \phi_i^{-1}(e_\ell - e_j)\}$$

$$= \{\phi_i^{-1} \, \ell^{-1}(hm_i), \, e_3 - e_2, \, e_4 - e_2\}.$$

(ii) $GL(3, \mathbb{R})$ est ouvert dans l'ensemble des matrices 3×3 et θ_i est une application continue, $i = 1(1)4$.

(iii) θ_i est invariant par homothéties. En effet, $\forall r \in \mathbb{R}$, $r \neq 0$, on a

$$\theta_i(r\ell) = \langle \phi_i^{-1}(r\ell)^{-1}(rhm_i), \, e_2 + e_3 + e_4 \rangle$$

$$= \theta_i(\ell).$$

(iv) Désignons par $\rho(\ell)$ le diamètre de la sphère inscrite dans le tétraèdre de sommets $A_j = \ell(e_j)$, $j = 0(1)4$. Alors $K_\sigma := \{\frac{\ell}{h(\ell)} \; ; \; \ell \in GL(3, \mathbb{R})$ et $\frac{h(\ell)}{\rho(\ell)} \leqslant \sigma \}$ est compact dans $GL(3, \mathbb{R})$. En effet, d'après le théorème 9.1-3, pour les $\ell \in GL(3, \mathbb{R})$ avec $\frac{h(\ell)}{\rho(\ell)} \leqslant \sigma$, on a

$\left\| \frac{\ell}{h(\ell)} \right\| = \frac{\|\ell\|}{h(\ell)} \leqslant c$, ce qui montre que K_σ est compact dans l'ensemble des matrices 3×3; de plus,

$$\det\left(\frac{\ell}{h(\ell)}\right) = \frac{\det \ell}{h^3(\ell)} \geqslant c \, \frac{\rho^3(\ell)}{h^3(\ell)} \geqslant \frac{c}{\sigma^3} > 0.$$

Des quatre propriétés précédentes, nous tirons que

$$\theta_i\{\ell \in GL(3,\mathbb{R});\ \frac{h(\ell)}{\rho(\ell)} \leqslant \sigma\} = \theta_i(K_\sigma)$$

est un compact de la droite réelle ne contenant pas zéro. Par suite, il existe une constante $c(\sigma)$ telle que $|\theta_i(\ell)| \geqslant c(\sigma) > 0$ pour tous les $\ell \in GL(3,\mathbb{R})$ avec $\frac{h(\ell)}{\rho(\ell)} \leqslant \sigma$.



Lemme 9.4-3.

Considérons les éléments de la base de Lagrange de l'élément fini de référence

$$\varphi^{a(S)}_{13+3i+j}(x,y,z) = \tilde{w}_{ij}(\phi_i\ \hat{\mu}_i(S);x,y,z),\ i = 1(1)4,\ j = 1,2,3,$$

où $\hat{\mu}_i(S)$ dépend de S comme dans le lemme 9.4-2. Soient $q \in [1,\infty]$ et $m \in \{0,1,2\}$. Alors, pour tout $\sigma > 0$, il existe une constante $c(\sigma)$ telle que, pour $n = 17(1)28$,

$$|\varphi^{a(S)}_n \circ L^{-1}|_{m,q,S} \leqslant c(\sigma)\ \frac{h^{3/q}}{\rho^m}$$

pour tous les tétraèdres S avec $\frac{h(S)}{\rho(S)} \leqslant \sigma$.

Démonstration.

D'après 5.2,

$$\varphi^{a(S)}_{17} = \tilde{w}_{11}(\hat{\mu}_1(S);\dots)$$

$$= r_o + \hat{\mu}_{1x}(S)r_1 + \hat{\mu}_{1y}(S)r_2 + \hat{\mu}_{1z}(S)r_3$$

où r_o, r_1, r_2 et r_3 appartiennent à $W^{2,\infty}(\tilde{S})$. En utilisant successivement le lemme 9.4-2 et le théorème 9.1-1, nous aurons pour $m = 0,1,2$ et $q \in [1,\infty]$

$$|\varphi_{17}^{a(S)} \circ L^{-1}|_{m,q,S}$$

$$\leqslant |r_o \; L^{-1}|_{m,q,S} + c(\sigma)\{|r_1 \circ L^{-1}|_{m,q,S} + |r_2 \circ L^{-1}|_{m,q,S} + |r_3 \circ L^{-1}|_{m,q,S}\}$$

$$\leqslant c \frac{h^{3/q}}{\rho^m} |r_o|_{m,q,\tilde{S}} + c(\sigma)\frac{h^{3/q}}{\rho^m}\{|r_1|_{m,q,\tilde{S}} + |r_2|_{m,q,\tilde{S}} + |r_3|_{m,q,\tilde{S}}\}$$

$$\leqslant c(\sigma) \frac{h^{3/q}}{\rho^m} .$$

D'une façon analogue, on peut montrer qu'il existe une constante générique $c(\sigma)$ indépendante de S telle que, pour n = 17(1)28,

$$|\varphi_n^{a(S)} \circ L^{-1}|_{m,q,S} \leqslant c(\sigma) \frac{h^{3/q}}{\rho^m} .$$



Démonstration du théorème 9.4.

Pour analyser l'erreur d'interpolation $v - \Pi v$, nous utiliserons trois autres interpolations.

L'interpolation Π_p est l'interpolation au moyen de l'élément polynomial de référence 4.3 et de ses équivalents affines; en particulier

- l'espace des interpolants V_p est un sous-espace linéaire des polynômes de degré $\leqslant 3$ sur le tétraèdre S; dim $V_p = 16$;
- les paramètres de Π_p sont affines-équivalents aux paramètres de référence $\tilde{F}_{ij}$, j = 0(1)3, i = 1(1)4.

Pour des paramètres libres $a := (\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \hat{\mu}_3, \hat{\mu}_4)$ fixés indépendemment de S, l'interpolation Π_a est effectuée à l'aide de la famille des affines-équivalents à l'élément de référence; l'espace des fonctions est

$$U_a = \{\tilde{u} \circ L^{-1};\ \tilde{u} \in \tilde{U}_a\}.$$

Remarquons que

- V_p est un sous-espace linéaire de U_a; en particulier $\Pi_a(\Pi_p v) = \Pi_p v$ quelque soit a;
- pour tout a, $\Pi_p \Pi_a = \Pi_p$; en effet, $\Pi_p \Pi_a v - \Pi_p v$ est un élément de V_p dont les valeurs aux sommets A_i sont nulles et dont les gradients aux sommets A_i sont nuls, $i = 1(1)4$; par unisolvance dans V_p, $\Pi_p \Pi_a v - \Pi_p v = 0$.

L'interpolation Π_Q est effectuée au moyen de l'élément élargi; l'espace des fonctions est $U_{a(S)}$ et les paramètres sont génériques.

Nous décomposons l'erreur d'interpolation en quatre termes

$$v - \Pi v = (v-\Pi_p v) + (\Pi_p v - \Pi_{a(S)}v)$$
$$+ (\Pi_{a(S)}v - \Pi_Q v) + (\Pi_Q v - \Pi v)$$

où $\Pi_{a(S)}$ désigne l'interpolation Π_a avec le choix $a = a(S)$.

Premier terme.

Soient $p \in]\frac{3}{2},\infty]$, $q \in [1,\infty]$, $m \in \{0,1,2\}$ tels que $\frac{1}{q} \geq \frac{1}{p} - \frac{3-m}{3}$.

Par le théorème 9.1-2, $\forall v \in W^{3,p}(S)$

$$|v - \Pi_p v|_{m,q,S} \leq c|\det \ell|^{1/q-1/p} \frac{h^3}{\rho^m} |v|_{3,p,S}$$
$$\leq c \frac{h^{3+3/q}}{\rho^{m+3/p}} |v|_{3,p,S} .$$

Par l'hypothèse $\frac{h}{\rho} \leq \sigma$ et en choisissant $q = p > \frac{3}{2}$,

$$|v - \Pi_p v|_{m,p,S} \leq c(\sigma)\, h^{3-m} |v|_{3,p,S} .$$

Deuxième terme.

On a $(\Pi_p v - \Pi_{a(S)} v)(A_i) = 0$, $\mathrm{grad}(\Pi_p v - \Pi_{a(S)} v)(A_i) = 0$,

$i = 1(1)4$. $\Pi_p v - \Pi_{a(S)} v$ est un élément de $U_{a(S)}$ que nous exprimons au moyen de la base de Lagrange

$$\Pi_p v - \Pi_{a(S)} v = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{3} \partial_{\ell(\tilde{n}_{ij})} (\Pi_p v - \Pi_{a(S)} v)(B_{ij}) \, \varphi_{13+3i+j}^{a(S)} \circ L^{-1}$$

$$= \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{3} \partial_{\ell(\tilde{n}_{ij})} (\Pi_p v - v)(B_{ij}) \, \varphi_{13+3i+j}^{a(S)} \circ L^{-1} .$$

Nous utilisons la majoration obtenue pour le premier terme avec $m = 1$, $q = \infty$, $p > \frac{3}{2}$,

$$|\partial_{\ell(\tilde{n}_{ij})} (\Pi_p v - v)(B_{ij})|$$

$$\leqslant c \, \|\ell(\tilde{n}_{ij})\| \; |v - \Pi_p v|_{1,\infty,S}$$

$$\leqslant ch \; |v - \Pi_p v|_{1,\infty,S}$$

$$\leqslant c \frac{h^4}{\rho^{1+3/p}} |v|_{3,p,S} .$$

Avec $\frac{h}{\rho} \leqslant \sigma$, $m = 0,1,2$, $q \in [1,\infty]$, d'après le lemme 9.4-3,

$$|\varphi_n^{a(S)} \circ L^{-1}|_{m,q,S} \leqslant c(\sigma) \frac{h^{3/q}}{\rho^m} \quad \text{pour } n = 17(1)28.$$

Ainsi, pour $m = 0,1,2$, $q \in [1,\infty]$, $p \in]\frac{3}{2},\infty]$, $v \in W^{3,p}(S)$ et S avec $\frac{h(S)}{\rho(S)} \leqslant \sigma$,

$$|\Pi_p v - \Pi_{a(S)} v|_{m,q,S} \leqslant c(\sigma) \frac{h^{4+3/q}}{\rho^{m+1+3/p}} |v|_{3,p,S} ,$$

$$|\Pi_p v - \Pi_{a(S)} v|_{m,p,S} \leqslant c(\sigma) \, h^{3-m} \, |v|_{3,p,S} .$$

Troisième terme.

On a $(\Pi_{a(S)} v - \Pi_Q v)(A_i) = 0$, $\text{grad}(\Pi_{a(S)} v - \Pi_Q v)(A_i) = 0$, $i = 1(1)4$. $\Pi_{a(S)} v - \Pi_Q v$ est un élément de $U_{a(S)}$ que nous exprimons au moyen de la base de Lagrange

$$\Pi_{a(S)} v - \Pi_Q v = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{3} \partial_{\ell(\tilde{n}_{ij})} (\Pi_{a(S)} v - \Pi_Q v)(B_{ij}) \; \varphi^{a(S)}_{13+3i+j} \circ L^{-1}.$$

Comme les restrictions de $\Pi_{a(S)} v - \Pi_Q v$ aux arêtes de S sont des polynômes de degré $\leqslant 3$ par rapport à l'abscisse curviligne le long des arêtes, il s'ensuit que $\Pi_{a(S)} v - \Pi_Q v$ s'annule le long des arêtes. Par suite,

$$\Pi_{a(S)} v - \Pi_Q v = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{3} < \ell(\tilde{n}_{ij}), n_{ij} > \; G_{ij}(\Pi_{a(S)} v - \Pi_Q v) \; \varphi^{a(S)}_{13+3i+j} \circ L^{-1}$$

$$= \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{3} < \ell(\tilde{n}_{ij}), n_{ij} > \; G_{ij}(\Pi_{a(S)} v - v) \; \varphi^{a(S)}_{13+3i+j} \circ L^{-1}$$

Nous utilisons les majorations obtenues pour le premier et le deuxième terme avec $m = 1$, $q = \infty$ et $p > \frac{3}{2}$

$$|G_{ij}(\Pi_{a(S)} v - v)|$$

$$\leqslant c \; |v - \Pi_p \; v|_{1,\infty,S} + c \; |\Pi_p \; v - \Pi_{a(S)} \; v|_{1,\infty,S}$$

$$\leqslant c \; \frac{h^3}{\rho^{1+3/p}} \; |v|_{3,p,S} + c(\sigma) \; \frac{h^4}{\rho^{2+3/p}} \; |v|_{3,p,S}$$

$$\leqslant c(\sigma) \; h^{2-3/p} \; |v|_{3,p,S} \; .$$

D'après le lemme 9.4-3,

$$|\varphi^{a(S)}_n \circ L^{-1}|_{m,p,S} \leqslant c(\sigma) \; h^{3/p-m} \; , \; n = 17(1)28.$$

Finalement,

$$|\Pi_{a(S)} v - \Pi_Q \; v|_{m,p,S} \leqslant c(\sigma) \; h^{3-m} \; |v|_{3,p,S}$$

où $m = 0,1,2$, $p \in]\frac{3}{2},\infty]$ et $\frac{h(S)}{\rho(S)} \leqslant \sigma$.

Quatrième terme.

On a $(\Pi_Q\, v - \Pi\, v)\ (A_i) = 0$ et $\mathrm{grad}(\Pi_Q\, v - \Pi\, v)(A_i) = 0$, $i = 1(1)4$. $\Pi_Q\, v - \Pi\, v$ est un élément de $U_{a(S)}$ que nous exprimons au moyen de la base de Lagrange

$$\Pi_Q\, v - \Pi\, v = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{3} \partial_{\ell(\tilde{n}_{ij})} (\Pi_Q v - \Pi v)(B_{ij})\ \varphi^{a(S)}_{13+3i+j} \circ L^{-1}.$$

Comme $\Pi_Q\, v - \Pi\, v$ est un polynôme de degré $\leqslant 3$ par rapport à l'abscisse curviligne le long des arêtes, il s'ensuit que $\Pi_Q\, v - \Pi\, v$ s'annule le long des arêtes. Par suite,

$$\Pi_Q\, v - \Pi\, v = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{3} < \ell(\tilde{n}_{ij}), n_{ij} > \ G_{ij}(\Pi_Q\, v - \Pi\, v)\ \varphi^{a(S)}_{13+3i+j} \circ L^{-1}.$$

Soit $w \in W^{2,p}(S)$, $p > \frac{3}{2}$. Notons $\Pi_\ell\, w$ l'interpolation linéaire de w sur le tétraèdre S avec les paramètres $w(A_1), w(A_2), w(A_3), w(A_4)$. Soit (i,j,k,ℓ) une permutation cyclique des nombres $(1,2,3,4)$. Alors, par définition de $\Pi\, v$ (voir 5.4),

$$G_{ij}(\Pi_Q\, v - \Pi\, v)$$

$$= \begin{cases} \partial_{n_{i1}} v(B_{i1}) - \frac{1}{2}\{\partial_{n_{i1}} v(A_k) + \partial_{n_{i1}} v(A_\ell)\} & \text{si } j = 1, \\ \partial_{n_{i2}} v(B_{i2}) - \frac{1}{2}\{\partial_{n_{i2}} v(A_\ell) + \partial_{n_{i2}} v(A_j)\} & \text{si } j = 2, \\ \partial_{n_{i3}} v(B_{i3}) - \frac{1}{2}\{\partial_{n_{i3}} v(A_j) + \partial_{n_{i3}} v(A_k)\} & \text{si } j = 3, \end{cases}$$

$$= \{\partial_{n_{ij}} v - \Pi_\ell(\partial_{n_{ij}} v)\}\ (B_{ij}).$$

Nous utilisons le théorème 9.1-2 pour Π_ℓ avec $n = 3$, $k = 1$, $s = 0$, $m = 0$, $q = \infty$, $p > \frac{3}{2}$; pour $w = \partial_{n_{ij}} v \in W^{2,p}(S)$

$$
\begin{aligned}
|G_{ij}(\Pi_Q v - \Pi v) &= |(w - \Pi_\ell(w))(B_{ij})| \\
&\leqslant |w - \Pi_\ell w|_{0,\infty,S} \\
&\leqslant c|\det \ell|^{-1/p} h^2 |w|_{2,p,S} \\
&\leqslant c \frac{h^2}{\rho^{3/p}} |v|_{3,p,S} .
\end{aligned}
$$

Le lemme 9.4-3 nous permet d'achever la majoration du quatrième terme

$$
\begin{aligned}
|\Pi_Q v - \Pi v|_{m,p,S} &\leqslant c(\sigma) \frac{h^{3+3/p}}{\rho^{m+3/p}} |v|_{3,p,S} \\
&\leqslant c(\sigma) h^{3-m} |v|_{3,p,S}
\end{aligned}
$$

pour $m = 0,1,2$ et $p \in \left]\frac{3}{2},\infty\right]$.



9.5. Théorème pour une suite régulière de mosaïques.

Définition.

Soit Ω un polyèdre borné dans $\mathbb{R}^3$. Nous définissons une suite régulière de mosaïques sur Ω de la façon suivante

(i) le n-ème élément de la suite est une mosaïque de K_n tétraèdres

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{k=1}^{K_n} S_{k,n} \quad \text{(voir 1.2);}$$

(ii) il existe une constante $\sigma > 0$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{h(S_{k,n})}{\rho(S_{k,n})} \leqslant \sigma \quad \text{pour } k = 1(1)K_n \ ;$$

(iii) la suite des mosaïques est telle que la suite correspondante des $h_n := \max_{k=1(1)K_n} h(S_{k,n})$ converge vers 0.

Théorème.

Soit Ω un polyèdre borné dans $\mathbb{R}^3$. Nous considérons une suite régulière de mosaïques sur Ω. A la n-ème mosaïque $S_{1,n},\ldots,S_{K_n,n}$ de la suite, nous associons

$h_n := \max_{k=1(1)K_n} h(S_{k,n})$ et

V_n l'espace de type élément fini correspondant sur Ω;

nous supposons que les restrictions $v|_{S_{k,n}}$ des fonctions $v \in V_n$ appartiennent toutes à la variante I-C ou bien toutes à la variante II. Soit

$$\Pi_n : W^{3,p}(\Omega) \longrightarrow V_n \ , \ p \in \left]\tfrac{3}{2},\infty\right] \ ,$$

l'interpolation globale sur Ω par une fonction de type élément fini sur la n-ème mosaïque. Alors

(i) il existe une constante $c(\sigma) = c(\sigma,p)$ telle que pour $v \in W^{3,p}(\Omega)$, $m = 0,1,2$ et $n \in \mathbb{N}$

$$|\Pi_n v - v|_{m,p,\Omega} \leqslant c(\sigma)\ h_n^{3-m}\ |v|_{3,p,\Omega};$$

(ii) si $p \in \left]\tfrac{3}{2},\infty\right[$ et $v \in W^{2,p}(\Omega)$, alors $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N_\varepsilon$ tel que pour $n \geqslant N_\varepsilon$ $\exists w_{n,\varepsilon} \in V_n$ avec $\|v - w_{n,\varepsilon}\|_{2,p,\Omega} < \varepsilon$.

Démonstration.

(i) Nous utilisons les théorèmes 9.3 et 9.4. Dans le cas $p < \infty$,

$$\begin{aligned}
&|v - \Pi_n v|_{m,p,\Omega} \\
&= \Big\{ \sum_{k=1}^{K_n} |v - \Pi_n v|^p_{m,p,S_{k,n}} \Big\}^{1/p} \\
&\leqslant \Big\{ \sum_{k=1}^{K_n} \{c(\sigma)\ h^{3-m}(S_{k,n})\ |v|_{3,p,S_{k,n}}\}^p \Big\}^{1/p} \\
&\leqslant c(\sigma)\ h_n^{3-m} \Big\{ \sum_{k=1}^{K_n} |v|^p_{3,p,S_{k,n}} \Big\}^{1/p} \\
&= c(\sigma)\ h_n^{3-m}\ |v|_{3,p,\Omega} \ .
\end{aligned}$$

Dans le cas $p = \infty$,

$$|v - \Pi_n v|_{m,\infty,\Omega}$$

$$= \max_{k=1(1)K_n} |v - \Pi_n v|_{m,\infty,S_{k,n}}$$

$$\leqslant \max_{k=1(1)K_n} c(\sigma)\ h^{3-m}(S_{k,n})\ |v|_{3,\infty,S_{k,n}}$$

$$\leqslant c(\sigma)\ h_n^{3-m} \max_{k=1(1)K_n} |v|_{3,\infty,S_{k,n}}$$

$$= c(\sigma)\ h_n^{3-m}\ |v|_{3,\infty,\Omega} \quad .$$

(ii) Soient $p \in]\frac{3}{2},\infty[$, $v \in W^{2,p}(\Omega)$ et $\varepsilon > 0$ donnés. Etant donné que Ω est un polyèdre borné et que $p < \infty$, $C^{\infty}(\bar{\Omega})$ est dense dans $W^{2,p}(\Omega)$; il existe donc $w_\varepsilon \in C^{\infty}(\bar{\Omega})$ tel que $\|v - w_\varepsilon\|_{2,p,\Omega} < \varepsilon/2$. Par la première partie du théorème,

$$\lim_{n\to\infty} \|\Pi_n w_\varepsilon - w_\varepsilon\|_{2,p,\Omega} = 0;$$

il existe ainsi un N_ε tel que $\forall n \geqslant N_\varepsilon\ \|\Pi_n w_\varepsilon - w_\varepsilon\|_{2,p,\Omega} < \varepsilon/2$.
Posons $w_{n,\varepsilon} := \Pi_n w_\varepsilon$; nous aurons finalement
$w_{n,\varepsilon} \in V_n$ et $\|v - w_{n,\varepsilon}\| < \varepsilon \quad \forall n \geqslant N_\varepsilon$.



§ 10 REMARQUES SUR L'UTILISATION PRATIQUE DES ELEMENTS.

10.1. Généralités sur l'intégration numérique.

Soit S un tétraèdre, $V = V^I$ ou V^{II} une solution du problème élément fini 1.2. Pour u, v $\in$ V, notons

$$P(u,v) := \sum_{\substack{|\alpha| \leq 2 \\ |\beta| \leq 2}} a_{\alpha\beta}\, \partial^\alpha u\, \partial^\beta v$$

où $a_{\alpha\beta}: S \longrightarrow \mathbb{R}$ sont continus. Nous considérons la forme bilinéaire pour un élément

$$a: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$a(u,v) := \int_S P(u,v).$$

Nous nous intéressons au calcul des coefficients

$$a(v_i, v_j), \quad i,j = 1(1)16,$$

où $\{v_1, \ldots, v_{16}\}$ est la base d'Hermite de V. L'intérêt de ces coefficients apparaît dans la résolution, par la méthode des éléments finis, de certaines équations différentielles aux dérivées partielles. Par exemple, pour l'équation biharmonique (voir 1.4), $P(u,v) = \Delta u\, \Delta v$ et

$$a_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 \text{ si } \alpha \text{ et } \beta \in \{(2,0,0),\ (0,2,0),\ (0,0,2)\}, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Revenons au cas général. Par un changement de variables,

$$a(v_i, v_j) = |\det L| \int_{\tilde{S}} P(v_i, v_j) \circ L.$$

Les intégrales sur le tétraèdre de référence sont approchées à l'aide d'une formule de quadrature

$$a(v_i, v_j) \sim |\det L| \sum_{k=1}^{K} \tilde{q}_k\, P(v_i, v_j)(L\tilde{Q}_k).$$

Il existe de nombreuses formules de quadrature

$$\{(\tilde{Q}_k, \tilde{q}_k), \quad k = 1(1)K\}$$

pour le tétraèdre de référence (voir par exemple STROUD [13]).

On peut poser

$$q_k := |\det L| \tilde{q}_k \ , \quad Q_k := L\tilde{Q}_k \ , \quad k = 1(1)K.$$

L'approximation s'écrit

$$a(v_i, v_j) \sim \sum_{k=1}^{K} q_k \ P(v_i, v_j)(Q_k), \quad i,j = 1(1)16.$$

Cette formule présente l'inconvénient de requérir 256K évaluation de P pour chaque élément (136K lorsque P(u,v) est symétrique).

10.2. Tableaux de référence.

Nous traitons maintenant le cas particulier $V = V^I$ (variante I-C) et $a_{\alpha\beta} \in \mathbb{R}$ (coefficients constants par élément). Pour calculer $a(v_i, v_j)$, il suffit de calculer les tableaux d'intégrales

$$R^{\alpha\beta} = (r^{\alpha\beta}_{\mu\nu}), \quad \mu,\nu = 1(1)44$$

où $r^{\alpha\beta}_{\mu\nu} = \int_{\tilde{S}} \partial^{\alpha}\tilde{u}_{\mu} \partial^{\beta}\tilde{u}_{\nu}$

et $\{\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_{44}\}$ sont les fonctions de référence (voir 6.2).

En effet,

$$a(v_i, v_j) = \sum_{\mu=1}^{44} \sum_{\nu=1}^{44} t_{\mu i} \ t_{\nu j} \ a(u_\mu, u_\nu)$$

$$a(u_\mu, u_\nu) = \sum_{|\alpha|\leqslant 2, |\beta|\leqslant 2} a_{\alpha\beta} \int_S \partial^{\alpha}u_\mu \ \partial^{\beta}u_\nu$$

$$\int_S \partial^{\alpha}u_\mu \ \partial^{\beta}u_\nu = \int_S \partial^{\alpha}(\tilde{u}_\mu \circ L^{-1}) \ \partial^{\beta}(\tilde{u}_\nu \circ L^{-1})$$

$$= \int_S \{ \sum_{|\gamma|=|\alpha|} c_\gamma^\alpha (\partial^\gamma \tilde{u}_\mu) \circ L^{-1} \} \{ \sum_{|\delta|=|\beta|} c_\delta^\beta (\partial^\delta \tilde{u}_\nu) \circ L^{-1} \}$$

$$= \sum_{|\gamma|=|\alpha|, |\delta|=|\beta|} c_\gamma^\alpha c_\delta^\beta \int_{L(\tilde{S})} (\partial^\gamma \tilde{u}_\mu \; \partial^\delta \tilde{u}_\nu) \circ L^{-1}$$

$$= |\det L| \sum_{|\gamma|=|\alpha|} \sum_{|\delta|=|\beta|} c_\gamma^\alpha c_\delta^\beta r_{\mu\nu}^{\gamma\delta} .$$

Les tableaux $R^{\alpha\beta}$ avec $|\alpha| = i$ et $|\beta| = j$ sont appelés <u>tableaux de référence d'ordre (i,j)</u>. En tenant compte de la relation

$$r_{\mu\nu}^{\alpha\beta} = r_{\nu\mu}^{\beta\alpha} , \quad \text{i.e.} \quad R^{\alpha\beta} = (R^{\beta\alpha})^T,$$

le nombre de tableaux à considérer est au plus de 55. Pour l'exemple 1.4, seuls les tableaux d'ordre (2,2) apparaissent et le nombre de tableaux à considérer tombe à 21.

<u>Remarque.</u>

Les fonctions de référence $\tilde{u}_\mu$, $\mu = 1(1)28$, sont des polynômes de degré $\leqslant 3$ par morceaux. Par suite, les intégrands $\partial^\alpha \tilde{u}_\mu \partial^\beta \tilde{u}_\nu$ sont des polynômes par morceaux de degré $\leqslant 6-|\alpha|-|\beta|$. Des formules de quadrature simples permettent de calculer $r_{\mu\nu}^{\alpha\beta}$, $\mu,\nu = 1(1)28$, de façon <u>exacte.</u> Le nombre de morceaux à considérer est de un si $\mu \leqslant 16$ et $\nu \leqslant 16$. Ce nombre est de trois dans les six cas suivants

$17 \leqslant \mu \leqslant 28$ et $\nu \leqslant 16$,
$\mu \leqslant 16$ et $17 \leqslant \nu \leqslant 28$,
$\mu,\nu \in \{17,18,19\}$,
$\mu,\nu \in \{20,21,22\}$,
$\mu,\nu \in \{23,24,25\}$,
$\mu,\nu \in \{26,27.28\}$.

Dans tous les autres cas, il faut considérer huit morceaux; on divise d'abord $\tilde{S}$ en quatre tétraèdres ayant pour base les faces de $\tilde{S}$ et possédant en commun le sommet $C = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$; deux de ces tétraèdres partiels doivent être encore divisés en trois parties ayant le centre de gravité d'une face de $\tilde{S}$ pour sommet commun.

10.3. Tableaux réduits.

Nous montrons maintenant qu'il suffit de ne calculer qu'une partie des 106'480 coefficients des tableaux de référence.

Première réduction.

Soient $I = \{1,2,...,44\}$ et

$$I_1 = \{1,2,3,4,17,18,19,29,33,34,35\}.$$

En utilisant les automorphismes $\{\alpha_1,...,\alpha_4\}$ du tétraèdre de référence (voir 4.1), nous montrons qu'il suffit de calculer

$$r_{\sigma\nu}^{\alpha\beta} \text{ avec } \underline{\sigma \in I_1} \text{ et } \nu \in I.$$

En effet, $\tilde{u}_\mu$, $\mu \in I$, peut s'écrire (d'une façon unique) sous la forme

$$\tilde{u}_\mu = \tilde{u}_\sigma \circ \alpha_i^{-1}, \sigma \in I_1, i \in \{1,2,3,4\}.$$

En remarquant que $\tilde{u}_\nu$ peut se mettre sous la forme

$$\tilde{u}_\nu = \tilde{u}_\tau \circ \alpha_i^{-1}, \tau \in I,$$

et que $|\det \alpha_i^{-1}| = 1$, nous aurons

$$r_{\mu\nu}^{\alpha\beta} = \int_{\tilde{S}} \partial^{\alpha}(\tilde{u}_{\sigma} \circ \alpha_i^{-1})\ \partial^{\beta}(\tilde{u}_{\tau} \circ \alpha_i^{-1})$$

$$= \int_{\tilde{S}} \{ \sum_{|\gamma|=|\alpha|} c_{\gamma}^{\alpha}(i)\ \partial^{\gamma}\tilde{u}_{\sigma} \} \circ \alpha_i^{-1}\ \{ \sum_{|\delta|=|\beta|} c_{\delta}^{\beta}(i)\ \partial^{\delta}\tilde{u}_{\tau} \} \circ \alpha_i^{-1}$$

$$= \sum_{|\gamma|=|\alpha|} \sum_{|\delta|=|\beta|} c_{\gamma}^{\alpha}(i) c_{\delta}^{\beta}(i) \int_{\alpha_i(\tilde{S})} (\partial^{\gamma}\tilde{u}_{\sigma}\ \partial^{\delta}\tilde{u}_{\tau}) \circ \alpha_i^{-1}$$

$$= \sum_{|\gamma|=|\alpha|} \sum_{|\delta|=|\beta|} c_{\gamma}^{\alpha}(i) c_{\delta}^{\beta}(i)\ r_{\sigma\tau}^{\gamma\delta} .$$

Deuxième réduction.

Notons $\tilde{P}$ l'espace linéaire engendré par $\{\tilde{u}_1,\ldots,\tilde{u}_{16}\}$,

$$\tilde{F} := \begin{bmatrix} \tilde{F}_{10} \\ \tilde{F}_{11} \\ \tilde{F}_{12} \\ \tilde{F}_{13} \\ \tilde{F}_{20} \\ \cdots \\ \tilde{F}_{43} \end{bmatrix} : \tilde{P} \longrightarrow \mathbb{R}^{16} \text{ (voir 4.1).}$$

D'après 4.3, le problème d'interpolation $\tilde{F}$ est $\tilde{P}$-unisolvant; $\{\tilde{u}_1,\ldots,\tilde{u}_{16}\}$ est la base de Lagrange de $\tilde{F}$. Etant donné que pour $\mu = 1(1)16$ $\partial^{\alpha}\tilde{u}_{\mu} \in \tilde{P}$, nous aurons

$$\partial^{\alpha}\tilde{u}_{\mu} = \sum_{\sigma=1}^{16} \pi_{\sigma\mu}^{\alpha}\ \tilde{u}_{\sigma}$$

avec $\pi_{1\mu}^{\alpha} := \tilde{F}_{10}(\partial^{\alpha}\tilde{u}_{\mu}),\ldots,\ \pi_{16\mu}^{\alpha} := \tilde{F}_{43}(\partial^{\alpha}\tilde{u}_{\mu})$.

Par suite,

$$r_{\mu\nu}^{\alpha\beta} = \sum_{\sigma=1}^{16} \pi_{\sigma\mu}^{\alpha}\ r_{\sigma\ \nu}^{(000)\beta} \text{ si } 0 \leqslant \mu \leqslant 16,$$

$$r_{\mu\nu}^{\alpha\beta} = \sum_{\tau=1}^{16} \pi_{\tau\gamma}^{\beta}\ r_{\mu\ \tau}^{\alpha(000)} \text{ si } 0 \leqslant \nu \leqslant 16.$$

Il n'est donc pas nécessaire de calculer et de mémoriser $r^{\alpha\beta}_{\mu\gamma}$ dans les deux cas

$|\alpha| \geqslant 1$ et $\mu \leqslant 16$,

$|\beta| \geqslant 1$ et $\nu \leqslant 16$.

Remarque.

Comme dans 1.4, il se peut que les ordres (0,0), (1,0) et (2,0) n'apparaissent pas tous dans P(u,v). Cependant, la deuxième réduction peut faire appel à des tableaux de ces ordres.

Tableaux réduits.

Le nombre d'intégrales à calculer et à mémoriser pour déterminer les tableaux de référence s'établit comme suit.

ordre des tableaux	nombre de tableaux sachant que $R^{\alpha\beta} = (R^{\beta\alpha})^T$.	nombre de coefficients après la première réduction.	nombre de coefficients après les deux réductions. (voir remarque précédente)		
(0,0)	1	484	1X11X44	=	484
(1,0)	3	1452	3X 7X44	=	924
(1,1)	6	2904	6X 7X28	=	1176
(2,0)	6	2904	6X 7X44	=	1848
(2,1)	18	8712	18X 7X28	=	3528
(2,2)	21	10164	21X 7X28	=	4116
TOTAL	55	26620			12076

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. BAZELEY, Y. CHEUNG, B. IRONS and O. ZIENKIEWICZ: Triangular elements in plate bending - conforming and nonconforming solution. In: Proceedings of First Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, AFFDL TR 66-80 (Wright Patterson AFB, Ohio, Oct. 1965) 547-576.

[2] G. BIRKHOFF, L. MANSFIELD: Compatible triangular finite elements. J. Math. Anal. Appl. 47, 531-553.

[3] P.G. CIARLET: The finite element method for elliptic problems. North-Holland Publishing Company, 1978.

[4] P.G. CIARLET and P.A. RAVIART: A mixed finite element method for the biharmonic equation. In: Mathematical aspects of finite element in partial differential equation (edited by Carl de Boor). Academic Press, 1974.

[5] R.W. CLOUGH and J. TOCHER: Finite element stiffness matrices for analysis of plates in bending. In: Proceeding of First Conference in Matrix Methods in Structural Mechanics, AFFDL TR66-80 (Wright Patterson AFB, Ohio, oct. 1965) 515-546.

[6] M. DELEZE et J.J. GOËL: Tétraèdre comme élément fini de classe C^1, à seize paramètres, contenant les polynômes de degré deux. Institut de mathématiques, Université de Fribourg, Switzerland, 1976.

[7] M. DELEZE, J.-J. GOËL and B. MEYENHOFER: Finite elements of C^1-class on a tetrahedron. International journal for numerical methods in engineering, vol 12, 787-793 (1978).

[8] J. DESCLOUX: Basic properties of Sobolev spaces. Approximation by finite elements. Ecole polytechnique fédérale de Lausanne, Switzerland, 1975.

[9] G. DUPUIS and J.-J. GOËL: Finite element with high degree of regularity. Int. J. Num. Meth. Eng. 2, 809-820 (1970).

[10] J.-J. GOËL: Construction of basic functions for numerical utilization of Ritz's method. Numer. Math. 12, 435-447 (1968).

[11] J.L. GOUT: Estimation de l'erreur d'interpolation d'Hermite dans $\mathbb{R}^n$. Numer. Math. 28, 407-429 (1977).

[12] G. STRANG, G. FIX: An analysis of the finite element method. Prentice-Hall, 1973.

[13] A.H. STROUD: Approximate calculation of multiple integrals. Prentice-Hall, 1971.

J'exprime ici toute ma reconnaissance à Monsieur le professeur Jean-Jacques Goël. Il m'a fait bénéficier de sa grande expérience de la construction d'éléments finis. Grâce à sa disponibilité et à ses encouragements, il m'a donné rapidement les moyens de travailler de façon autonome.

Mes remerciements vont aussi à Monsieur le professeur Jean Descloux dont les précieux conseils m'ont permis d'achever et de présenter cette thèse.

C U R R I C U L U M   V I T A E

1948 - 1963 Marcel Délèze est né à Nendaz (Valais), dans sa commune d'origine, le 14 février 1948. Il fréquente l'école primaire de Fully (VS), puis l'école secondaire de Martigny.

1963 - 1968 Il entre à l'Ecole Normale des Instituteurs de Sion. Il obtient le diplôme d'enseignement primaire.

1968 - 1971 A l'Université de Fribourg, il étudie les mathématiques, la physique, la chimie, la géographie et la pédagogie. Il reçoit le diplôme d'enseignement secondaire.

1971 - 1975 Il poursuit ses études dans le cadre du diplôme de mathématiques. Les branches principales choisies sont l'analyse et les mathématiques appliquées. L'algèbre, la physique théorique et la physique expérimentale ont été choisies comme branches secondaires. Le diplôme de mathématiques lui est décerné en avril 1975.

1975 - 1978 Il est assistant auprès de l'Institut de mathématiques de l'Université de Fribourg. Il se spécialise dans le domaine de l'analyse numérique. Il rédige cette thèse sous la direction du professeur J.-J. Goël. Après la mort de ce dernier survenue en mai 1978, le professeur Jean Descloux de l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne accepte de corriger le manuscrit et de devenir le premier rapporteur de la thèse.